正 8 面体群の構造

北 川 正 一

1 正多面体

正多面体は以下の条件を満たす立体として定義される。
(1) 有限個の面で構成される凸多面体である。
(2) 各面は合同な正多角形からなる。
(3) 各頂点に集まる面の数は同一である。
これらはどれも必須のものである。

この条件を満たす立体は 5 種類あり, 各面を形成する正 p 角形が各頂点に q 個集まっているものを (p, q) 型ということにすると, p, q は

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}, \quad p>2, \quad q>2$$

を満たす整数として条件付けされる。それらは, 以下の表のように分類される。

(p,q)	V	E	F	面	正多面体
(3,3)	4	6	4	正 3 角形	正 4 面体
(4,3)	8	12	6	正方形	正 6 面体 (立方体)
(3,4)	6	12	8	正 3 角形	正 8 面体
(5,3)	20	30	12	正 5 角形	正 12 面体
(3,5)	12	30	20	正 3 角形	正 20 面体

ここで, V は頂点の数, E は辺の数, F は面の数であるが, これらは, p, q により

$$V=\frac{4p}{4-(p-2)(q-2)},\quad E=\frac{2pq}{4-(p-2)(q-2)},\quad F=\frac{4q}{4-(p-2)(q-2)}$$

と表示される。これより, (p,q) 型と (q,p) 型が双対であることもわかる。すなわち, $V(p,q)=F(q,p)$, $E(p,q)=E(q,p)$ が成立している。

正多面体はその対称性の高さから, 多くの回転対称性を持つ。それらの回転の軸は, 多面体 (の外接球) の中心を O とするとき,

(1) O と 頂点を通る直線

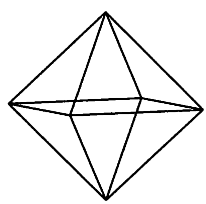
(2) O と 辺の中点を通る直線

(3) O と 面の重心を通る直線

の 3 種類に分類できる。これらの軸の回りの定角度の回転により, その正多面体は空間内に占める位置を保つ。そのような回転変換の全体は群をなし, 正多面体群と呼ばれる。双対の関係にある 2 つの正多面体についてはその変換群は同型になる。

ここでは, 正 8 面体に対する対称群 – 正 8 面体群 $\mathcal{O}$ – について考察する。

2 正 8 面体群 $\mathcal{O}$



正 8 面体は 8 個の正 3 角形 ($p=3$) より成り, 各頂点には 4 個 ($q=4$) の正 3 角形が集まっている。形状は側面が正 3 角形でできている 4 角錐 2 個を底面で貼り合わせたものとなっている。先にみたように構成要素については, 頂点の数 $V=6$, 辺の数 $E=12$, 面の数 $F=8$ である。

回転変換については, 対称軸の数と回転角, (恒等変換を除く) 変換の数は以下のようになる。

型	対称軸の数	回転角	変換の数
(1)	$3=V/2$	$k\pi/2\ \ (k=1,2,3)$	$9{=}V/2\cdot(q-1)$
(2)	$6=E/2$	π	$6{=}E/2$
(3)	$4=F/2$	$2k\pi/3\ \ (k=1,2)$	$8{=}F/2\cdot(p-1)$

この表より, 正 8 面体の対称変換の総数は恒等変換を含めると, 1+9+6+8=24 個あることがわかる。

(1) の型の変換については, 1 本の回転軸に対し, 位数 4 の元が 2 個, 位数 2 の元が 1 個存在する。回転軸ごとに (2) 型は位数 2 の元が 1 個, (3) 型は位数 3 の元が 2 個となっている。

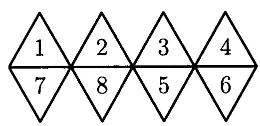
これらの変換全体は, 変換を続けて行うことを積として, 群をなす。以下では, 置換および行列の形で $\mathcal{O}$ の変換を表示し, 群の構造を調べることにする。

2.1　置換群としての特徴付け

正多面体の合同変換はその幾何学的要素の置換としてとらえることができる。

正8面体の場合は 頂点の置換とみなすと, 正8面体群 $\mathcal{O}$ は6次対称群 $\mathfrak{S}_6$ の中に表現される。辺, 面についても同様に考えることができるが, ここでは面について考察する。面の数 $F = 8$ であるから, 8次対称群 $\mathfrak{S}_8$ の中に表現することができるが, この節ではその構造について調べる。この単射準同型 $\mathcal{O} \to \mathfrak{S}_8$ により, $\mathcal{O} \subset \mathfrak{S}_8$ とみなすことにする。

展開図の形で, 各面に,



と番号を付け, その置換の様子を調べる。番号付けは, 上段の4枚を順に1から4までとし, 下段の面は平行に対面している上段の番号+4としている。

(1) の型の変換として, 1, 2, 8, 7 の集まる頂点を通る軸の回りの時計回り1/4回転を取り上げる。もう一方の軸の端点は, 3, 4, 6, 5 の集まる頂点であるから, この回転の前後で状態の変化は,

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 7 & 1 & 4 & 6 \\ 8 & 2 & 3 & 5 \end{matrix}$$

となる。したがって, この変換は, 回転後の番号が回転前のどの番号の位置にあるかを表示した置換として $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 5 & 3 & 6 & 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_8$ と表示される。この表示において, 数値を mod 4 で考えると $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ となり, 0 を 4 で表示し直すと, この置換は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_4$ に簡略化することができる。

次に, (2) の型の回転として, 1 の面と 7 の面の共通境界となっている辺の中点を通る軸の回りの回転について調べる。この軸は面 3 と面 5 の共通境界

の辺の中点を通り, 回転角は π であるので, 回転前後の配置の変化は,

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 7 & 6 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{matrix}$$

となる。これより, 置換の表示として $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 8 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_8$ が得られ, mod 4 で書き直すと $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ となり, 簡略化表示は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_4$ となる。これは互換であり, (2) 型の変換は $\mathfrak{S}_4$ のすべての互換に対応している。

同様に, (3) の型の回転として, 1 の面の重心を通る軸の回りの時計回り 1/3 回転について表示を求めてみる。この回転は 5 の面の重心の回りの回転でもあるので, 回転での配置変化は

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{matrix}$$

となる。この置換は $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 8 & 2 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_8$ と表示され, mod 4 で簡略化すると $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_4$ なる表示が得られる。

他の変換についても同様の簡略化が可能であり, 結局, すべての回転変換は $\mathfrak{S}_4$ の置換としてとらえられることが確認できる。

この状況を整理するため, $F_8 = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, F_4 = \{1,2,3,4\}$ に対し, $p : F_8 \to F_4$ を $p(k) = \begin{cases} k \bmod 4 & (k \bmod 4 \neq 0) \\ 4 & (k \bmod 4 = 0) \end{cases}$ と定義する。$r \in \mathcal{O} \subset \mathfrak{S}_8$ について, p から導かれる簡略化 $\underline{r} \in \mathfrak{S}_4$ を次のダイアグラムでとらえることができる。

$$\begin{array}{ccc} F_8 & \xrightarrow{r} & F_8 \\ p\downarrow & & \downarrow p \\ F_4 & \xrightarrow[\underline{r}]{} & F_4 \end{array}$$

この写像 p は, 正８面体の８つの面を平行な２つの面を同一視して４つの組に分けて扱っていることに相当する。

以上のことは, 正8面体群 $\mathcal{O}$ は, 4組の平行な対面の置換群とみなすことにより, 4次対称群 $\mathfrak{S}_4$ として捉えられることを示している。

$$\mathcal{O} \simeq \mathfrak{S}_4$$

これで, 正8面体群 $\mathcal{O}$ の置換群としての特徴付けが明らかとなったわけであるが, 幾何学的な考察のために, 回転変換と置換との関係を確認しておく。

(1) 型の回転は, 位数4の元と位数2の元からなるが, 位数4の元は長さ4の巡回置換に対応し, 位数2の元はその2乗であるので, 2個の互換の積となっている。

(2) 型の回転は互換となっており, すべての互換6個に対応している。

(3) 型の回転は位数3の元で, これは長さ3の巡回置換となっている。

2.2　$\mathcal{O}$ の変換の行列表示

3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ に右手系の座標系を一つ固定する。$\mathbb{R}^3$ 内の6点 $\mathrm{A}_+ : (1,0,0)$, $\mathrm{A}_- : (-1,0,0)$, $\mathrm{B}_+ : (0,1,0)$, $\mathrm{B}_- : (0,-1,0)$, $\mathrm{C}_+ : (0,0,1)$, $\mathrm{C}_- : (0,0,-1)$ を頂点とする正8面体 Oc について, その合同変換群を考察する。Oc の合同変換は3次元空間 $\mathbb{R}^3$ の回転群 $SO(3)$ の要素として表現できる。前節での分類をもとに, その表示を求めることにする。

以下, $(x,y,z) = t(\alpha,\beta,\gamma), t \in \mathbb{R}$ で表示される原点 $(0,0,0)$ を通る直線を $\ell_{[\alpha:\beta:\gamma]}$ と表記する。

(1) 型の回転軸は

$$\begin{aligned}
\ell_{[1:0:0]} &= \{(x,y,z) \mid y = z = 0\} : (x\text{ 軸}, \mathrm{A}_+\mathrm{A}_-),\\
\ell_{[0:1:0]} &= \{(x,y,z) \mid z = x = 0\} : (y\text{ 軸}, \mathrm{B}_+\mathrm{B}_-),\\
\ell_{[0:0:1]} &= \{(x,y,z) \mid x = y = 0\} : (z\text{ 軸}, \mathrm{C}_+\mathrm{C}_-)
\end{aligned}$$

の3本。x 軸回りの回転を x, y 軸回りの回転を y, z 軸回りの回転を z と表記し, これらは回転軸の正の方向から見て, 反時計回り $\pi/4$ の回転とする。

(2) 型の回転軸は

$$\begin{aligned}
\ell_{[1:1:0]} &= \{(x,y,z) \mid z = 0,\ x - y = 0\} : xy\text{ 平面上の直線},\\
\ell_{[1:-1:0]} &= \{(x,y,z) \mid z = 0,\ x + y = 0\} : xy\text{ 平面上の直線},\\
\ell_{[0:1:1]} &= \{(x,y,z) \mid x = 0,\ y - z = 0\} : yz\text{ 平面上の直線},\\
\ell_{[0:1:-1]} &= \{(x,y,z) \mid x = 0,\ y + z = 0\} : yz\text{ 平面上の直線},\\
\ell_{[1:0:1]} &= \{(x,y,z) \mid y = 0,\ z - x = 0\} : zx\text{ 平面上の直線},\\
\ell_{[1:0:-1]} &= \{(x,y,z) \mid y = 0,\ z + x = 0\} : zx\text{ 平面上の直線}
\end{aligned}$$

の6本。変換はこの軸の順に, $h_{z+}, h_{z-}, h_{x+}, h_{x-}, h_{y+}, h_{y-}$ とする。

(3) 型の回転軸は

$$\begin{aligned}\ell_{[1:1:1]} &= \{(x,y,z) \mid x = y = z\},\\ \ell_{[1:1:-1]} &= \{(x,y,z) \mid x = y = -z\},\\ \ell_{[1:-1:1]} &= \{(x,y,z) \mid x = -y = z\},\\ \ell_{[1:-1:-1]} &= \{(x,y,z) \mid x = -y = -z\}\end{aligned}$$

の 4 本。前節での面の番号付けについて, $\triangle A_+B_+C_+$ を 1, $\triangle B_+A_-C_+$ を 2, $\triangle A_-B_-C_+$ を 3, $\triangle B_-A_+C_+$ を 4 と対応付け, j の面の重心を通る回転軸の回りの正 8 面体 Oc の外側から見て, 反時計回り $2\pi/3$ の回転を w_j $(j = 1,2,3,4)$ とする。

行列表示については $\mathbb{R}^3$ の縦ベクトルへの作用を仮定しているものとする。したがって, 変換を続けて行うことに対応する積は行列の演算では左から掛けることになる。

以上の条件のもとで $\mathcal{O}$ のすべての変換の行列表示をリストアップする。

恒等変換 (単位元) $\quad e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1) 型の回転の行列表示

○ $\ell_{[1:0:0]}$ の回りの回転

この回転 x は $A_+ : (1,0,0)$ を固定し, $B_+ : (0,1,0)$ を $C_+ : (0,0,1)$ に, $C_+ : (0,0,1)$ を $B_- : (0,-1,0)$ に移す。したがって $x, x^2, x^3 = x^{-1}$ の表示は以下のようになる。

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, x^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

他の軸の回りの回転についても同様。

○ $\ell_{[0:1:0]}$ の回りの回転

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, y^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, y^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

○ $\ell_{[0:0:1]}$ の回りの回転

$$z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, z^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, z^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 型の回転の行列表示

○ $\ell_{[1:1;0]}$ の回りの回転
$A_+ : (1,0,0)$ を $B_+ : (0,1,0)$ に, $B_+ : (0,1,0)$ を $A_+ : (1,0,0)$ に,
$C_+ : (0,0,1)$ を $C_- : (0,0,-1)$ に移す。したがって

$$h_{z+} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ となる。

同様にして, 以下の表示を得ることができる。

○ $\ell_{[1:-1:0]}$ の回りの回転 $$h_{z-} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

○ $\ell_{[0:1:1]}$ の回りの回転 $$h_{x+} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

○ $\ell_{[0:1:-1]}$ の回りの回転 $$h_{x-} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

○ $\ell_{[1:0:1]}$ の回りの回転 $$h_{y+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

○ $\ell_{[1:0:-1]}$ の回りの回転 $$h_{y-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) 型の回転の行列表示

○ $\ell_{[1:1:1]}$ の回りの回転
w_1 は $A_+ : (1,0,0)$ を $B_+ : (0,1,0)$ に, $B_+ : (0,1,0)$ を $C_+ : (0,0,1)$ に,
$C_+ : (0,0,1)$ を $A_+ : (1,0,0)$ に移す。したがって

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad w_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。同様に

○ $\ell_{[1:-1:-1]}$ の回りの回転

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

○ $\ell_{[1:1:-1]}$ の回りの回転

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad w_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

○ $\ell_{[1:-1:1]}$ の回りの回転

$$w_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad w_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

以上 24 個の回転により, $\mathcal{O}$ を Oc の合同変換群として,

$$\mathcal{O} = \left\{ \begin{array}{cccccccccc} e, & x, & x^2, & x^{-1}, & y, & y^2, & y^{-1}, & z, & z^2, & z^{-1}, \\ h_{x+}, & h_{x-}, & h_{y+}, & h_{y-}, & h_{z+}, & h_{z-}, & & & & \\ w_1, & w_1^{-1}, & w_2, & w_2^{-1}, & w_3, & w_3^{-1}, & w_4, & w_4^{-1} & & \end{array} \right\}$$

とみなすことができる。これらの行列について, 代数的性質をまとめておく。

固有値 (重複を込めて)

(1) 型	位数 4 の元　$1,\ i = \sqrt{-1},\ -i,$　位数 2 の元　$1,\ -1,\ -1$
(2) 型	$1,\ -1,\ -1$
(3) 型	$1,\ \omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \overline{\omega} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

共役類 ($\mathcal{O}$ の中で)

(1) 型	$x \sim y \sim z \sim x^{-1} \sim y^{-1} \sim z^{-1},\ x^2 \sim y^2 \sim z^2$
(2) 型	$h_{z+} \sim h_{z-} \sim h_{y+} \sim h_{y-} \sim h_{x+} \sim h_{x-}$
(3) 型	$w_1 \sim w_2 \sim w_3 \sim w_4 \sim w_1^{-1} \sim w_2^{-1} \sim w_3^{-1} \sim w_4^{-1}$

置換としてとらえると x^2 等は偶置換で, h_{x+} 等は奇置換であり, 共役とはなり得ない。一方, $GL(3,\mathbb{C})$ で考えれば, どちらも 1/2 回転であり, 固有値が一致することから, x^2, h_{z+} 等は共役となっている。

2.3　置換表現と行列表現の対応

置換表示と行列表示の対応を提示しておく。これは, 偶置換, 奇置換の確認, 生成元の考察に有用である。長さ n の巡回置換は $n-1$ 個の互換の積で表現できることを注意しておく。

(1) 型

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 2\ 3)$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 4)$$

$$x^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2\ 4)$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 4\ 2)$$

$$y^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 4)(2\ 3)$$

$$y^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 4\ 3)$$

$$z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3\ 4)$$

$$z^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2\ 4)$$

$$z^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 3\ 2)$$

置換としてとらえると, x^2, y^2, z^2 は偶置換に, $x, x^{-1}, y, y^{-1}, z, z^{-1}$ は奇置換に対応している。また. 偶置換は位数 2 の元, 奇置換は位数 4 の元となっている。

(2) 型

$$h_{z+} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3)$$

$$h_{z-} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 4)$$

$$h_{x+} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2)$$

$$h_{x-} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (3\ 4)$$

$$h_{y+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 4)$$

$$h_{y-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (2\ 3)$$

これらは, すべて位数 2 の元となっており, 互換 (奇置換) である。したがって, 生成元として基本的なものと考えられる。

(3) 型

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (2\ 4\ 3)$$

$$w_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 3\ 4)$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 3)$$

$$w_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 4)$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 2)$$

$$w_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 4)$$

$$w_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2)$$

$$w_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)$$

これらは, すべて位数 3 の元であり, 偶置換に対応している。

3 $\mathcal{O}$ の構造

正 8 面体群 $\mathcal{O}$ の位数は 24 で, 部分群として可能性があるのは位数 2, 3, 4, 6, 8, 12 のものであるが, それらのすべてが実際に存在する。また, 生成元としては, 例えば x, y をとることができ, $\mathcal{O}$ は高々 2 つの元で生成されている。部分群についても, 生成系として 2 つの元を考えることが有効である。

s と t で生成される群 $\langle s, t\rangle \subset \mathcal{O}$ について, 以下の命題が成立する。

命題 1. $s = x$, $t \notin \langle s \rangle$ とすると,

$$\langle s,t \rangle = \begin{cases} \mathcal{D}_4(x) & \left(\begin{array}{l} x \text{の回転軸と} t \text{の回転軸が直交} \\ \text{かつ} \#\langle t \rangle = 2 \end{array} \right) \\ \mathcal{O} & \left(\text{上記以外} \right) \end{cases}$$

となる。ただし, $\mathcal{D}_4(x) = \{e, x, x^2, x^{-1}, y^2, z^2, h_{x+}, h_{x-}\}$ である。

具体的には $t \in \{y^2, z^2, h_{x+}, h_{x-}\}$ の場合に $\langle x,t \rangle = \mathcal{D}_4(x)$ となり, この群は位数 8 の 2 面体群と同型となっている。$s = y$ または z の場合も同様の命題が成立する。

位数 3 の回転で生成される群については, 以下が証明できる。

命題 2. $s \in \{w_j \mid j = 1,2,3,4\}$, $t \notin \langle s \rangle$ とする。このとき,

$$\langle s,t \rangle = \begin{cases} \mathcal{T}_{12} & \left(t \in \{x^2, y^2, z^2\} \text{または} t = w_k \ (k \neq j) \right) \\ \mathcal{D}_3(j) & \left(\begin{array}{l} t \in \{h_{x\pm}, h_{y\pm}, h_{z\pm}\} \text{かつ} \\ s \text{の回転軸と} t \text{の回転軸が直交} \end{array} \right) \\ \mathcal{O} & \left(\text{上記以外} \right) \end{cases}$$

となる。ただし, $\mathcal{T}_{12} = \{e, x^2, y^2, z^2, w_1, w_2, w_3, w_4, w_1^{-1}, w_2^{-1}, w_3^{-1}, w_4^{-1}\}$ で, 4 次交代群 $\mathfrak{A}_4$ に同型。$\mathcal{D}_3(j)$ は位数 6 の 2 面体群 ($\simeq \mathfrak{S}_3$) に同型。

位数 2 の元, 特に互換で生成される群については,

命題 3. $s, t \in \{h_{x+}, h_{x-}, h_{y+}, h_{y-}, h_{z+}, h_{z-}\}, (s \neq t)$ に対し,

$$\langle s,t \rangle = \begin{cases} \mathcal{D}_2(u) & (s \text{の回転軸と} t \text{の回転軸が直交}) \\ \mathcal{D}_3(j) & (\text{上記以外}) \end{cases}$$

となる。ここで, $\mathcal{D}_2(u) = \{e, h_{u+}, h_{u-}, u^2\} (u = x, y$ または $z)$ は位数 4 の 2 面体群 ($\simeq$ クラインの 4 元群) に同型, $\mathcal{D}_3(j)$ は命題 2 に同じ。

証明については, 次節にあるように部分群により固定される図形に注目すれば, 容易である。

命題 2, 3 に現れる 3 次対称群に同型な部分群は 4 個あり, 次の表の形に整理される。

j	w_j の回転軸	h_{x+} $\ell_{[0:1:1]}$	h_{x-} $\ell_{[0:1:-1]}$	h_{y+} $\ell_{[1:0:1]}$	h_{y-} $\ell_{[1:0:-1]}$	h_{z+} $\ell_{[1:1:0]}$	h_{z-} $\ell_{[1:-1:0]}$
1	$\ell_{[-1:-1:-1]}$		○		○		○
2	$\ell_{[-1:1:1]}$		○	○		○	
3	$\ell_{[1:1:-1]}$	○		○			○
4	$\ell_{[1:-1:1]}$	○			○	○	

○ は w_j の回転軸とその回転の軸が直交していることを示す。したがって, $\mathcal{D}_3(1) = \{e, w_1, w_1^{-1}, h_{x-}, h_{y-}, h_{z-}\}$ 等となっていることがわかる。

以上をもとに次節では $\mathcal{O}$ のすべての部分群を決定する。

3.1　部分群

$\mathcal{O}$ の部分群は以下のもので尽くされる。本節では位数ごとにすべてを提示し, 共役類に分類する。

○ **位数 12 の群**

偶置換に対応する元全体からなる部分群 $\mathcal{T}_{12}$ は, 4 次交代群 $\mathfrak{A}_4$ に同型で位数は 12 である。この部分群は指数 2 で, 正規部分群となっており, 位数 12 の部分群は $\mathcal{T}_{12}$ に限られる。

$$\mathcal{T}_{12} = \left\{ \begin{array}{cccc} e, & x^2, & y^2, & z^2 \\ w_1, & w_2, & w_3, & w_4 \\ w_1^{-1}, & w_2^{-1}, & w_3^{-1}, & w_4^{-1} \end{array} \right\} \lhd \mathcal{O}$$

$\mathbb{R}^3$ に 4 点を $\mathrm{T}_1 : (1,1,1)$, $\mathrm{T}_2 : (-1,1,-1)$, $\mathrm{T}_3 : (-1,-1,1)$, $\mathrm{T}_4 : (1,-1,-1)$ ととる。この 4 点は正 4 面体 Te の頂点をなしており, その 6 本の辺の中点は正 8 面体 Oc の 6 つの頂点となっている。$\mathcal{O}$ の回転は Te にも回転も引き起こすが, $\mathcal{T}_{12}$ は, $\mathcal{O}$ の元のうち, Te を保存するもの全体となっている。

$$\mathcal{T}_{12} = \{t \in \mathcal{O} \mid t(Te) = Te\}$$

この回転により $\mathcal{T}_{12}$ は正 4 面体群とみなすことができる。

また, 生成元としては以下のようなものが取れる。

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{12} &= \langle u^2, w_j \rangle \quad (u \in \{x, y, z\}, j \in \{1, 2, 3\}) \\ &= \langle w_j, w_k \rangle \quad (j, k \in \{1, 2, 3\}, j \neq k) \end{aligned}$$

○ **位数 8 の群**

位数 8 の部分群はの 3 個存在する。これは, 位数 4 の巡回群の数に等しい。

$$\mathcal{D}_4(x) = \{e, x, x^2, x^{-1}, y^2, z^2, h_{x+}, h_{x-}\},$$
$$\mathcal{D}_4(y) = \{e, y, y^2, y^{-1}, z^2, x^2, h_{y+}, h_{y-}\},$$
$$\mathcal{D}_4(z) = \{e, z, z^2, z^{-1}, x^2, y^2, h_{z+}, h_{z-}\}$$

それらはいずれも共役である。

$$\mathcal{D}_4(x) \sim \mathcal{D}_4(y) \sim \mathcal{D}_4(z)$$

$\mathcal{D}_4(x)$ は, 正方形 $\mathrm{B_+C_+B_-C_-}$: $Sq(x) = Oc \cap \{(x, y, z) \mid x = 0\}$ を保存する変換の全体からなり,

$$\mathcal{D}_4(x) = \{t \in \mathcal{O} \mid t(Sq(x)) = Sq(x)\}$$

$Sq(x)$ の対称群として, 位数 8 の 2 面体群と同型となっている。同様に

$\mathcal{D}_4(y)$ は $\mathrm{C_+A_+C_-A_-}$: $Sq(y) = Oc \cap \{(x, y, z) \mid y = 0\}$,

$\mathcal{D}_4(z)$ は $\mathrm{A_+B_+A_-B_-}$: $Sq(z) = Oc \cap \{(x, y, z) \mid z = 0\}$

を保存する部分群

$$\mathcal{D}_4(y) = \{t \in \mathcal{O} \mid t(Sq(y)) = Sq(y)\}$$

$$\mathcal{D}_4(z) = \{t \in \mathcal{O} \mid t(Sq(z)) = Sq(z)\}$$

とみなすことができる。

これらの図形に注目すると, その固定群の共役を与える変換を求めることができる。$z(Sq(y)) = Sq(x)$ であるので, $z^{-1}\mathcal{D}_4(x)z = \mathcal{D}_4(y)$ となる。より詳しくは, $t \in \{t \in \mathcal{O} | t(Sq(y)) = Sq(x)\}$ に対し, $t^{-1}\mathcal{D}_4(x)t = \mathcal{D}_4(y)$ となることがわかる。ただし, ここでの積の順序は行列の演算の形式に従ったものである。この集合を決定すると

$$\{t \in \mathcal{O} | t(Sq(y)) = Sq(x)\} = \{z, z^{-1}, h_{z+}, h_{z-}, w_1^{-1}, w_2, w_3^{-1}, w_4\}$$

となる。同様に

$$\{t \in \mathcal{O} | t(Sq(x)) = Sq(z)\} = \{y, y^{-1}, h_{y+}, h_{y-}, w_1^{-1}, w_2, w_3^{-1}, w_4\}$$

$$\{t \in \mathcal{O} | t(Sq(z)) = Sq(y)\} = \{x, x^{-1}, h_{x+}, h_{x-}, w_1^{-1}, w_2, w_3^{-1}, w_4\}$$

であり, これらの変換で $\mathcal{D}_4(u)$ $(u \in \{x, y, z\})$ は共役となる。

生成元としては,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_4(x) &= \langle x, y^2\rangle = \langle x, z^2\rangle = \langle x, h_{x+}\rangle = \langle x, h_{x-}\rangle \\ &= \langle y^2, h_{x+}\rangle = \langle y^2, h_{x-}\rangle = \langle z^2, h_{x+}\rangle = \langle z^2, h_{x-}\rangle\end{aligned}$$

等が選べる。

○ **位数 6 の群**

位数 6 の群は 4 個存在する。

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_3(1) &= \{e, w_1, w_1^{-1}, h_{x-}, h_{y-}, h_{z-}\}, \\ \mathcal{D}_3(2) &= \{e, w_2, w_2^{-1}, h_{x-}, h_{y+}, h_{z+}\}, \\ \mathcal{D}_3(3) &= \{e, w_3, w_3^{-1}, h_{x+}, h_{y+}, h_{z-}\}, \\ \mathcal{D}_3(4) &= \{e, w_4, w_4^{-1}, h_{x+}, h_{y-}, h_{z+}\}\end{aligned}$$

これは位数 3 の巡回群の数に等しく, すべて互いに共役である。

$$\mathcal{D}_3(1) \sim \mathcal{D}_3(2) \sim \mathcal{D}_3(3) \sim \mathcal{D}_3(4)$$

$\mathcal{D}_3(1)$ は, Oc と w_1 の回転軸と垂直な原点を通る平面 $x+y+z=0$ とでできる正 6 角形 $He(1) = Oc \cap \{(x,y,z) \mid x+y+z=0\}$ を保存する変換の全体からなり,

$$\mathcal{D}_3(1) = \{t \in \mathcal{O} \mid t(He(1)) = He(1)\}$$

位数 6 の 2 面体群と同型となっている。同様に,

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}_3(2) \text{ は } He(2) = Oc \cap \{(x,y,z) \mid x-y-z=0\}, \\ &\mathcal{D}_3(3) \text{ は } He(3) = Oc \cap \{(x,y,z) \mid x+y-z=0\}, \\ &\mathcal{D}_3(4) \text{ は } He(4) = Oc \cap \{(x,y,z) \mid x-y+z=0\}\end{aligned}$$

を保存しており,

$$\mathcal{D}_3(j) = \{t \in \mathcal{O} \mid t(He(j)) = He(j)\} \quad (j = 1,2,3,4)$$

と特徴付けされる。

これらの群の共役を与える変換について考える。$He(j)$ を移す変換は平行に対面する 2 面の置換に対応し, 置換群としてとらえるとわかりやすい。置換表示より, 1 を 2 に移しているものを集めれば,

$$\{t \in \mathcal{O} | t(He(1)) = He(2)\} = \{x^2, y^{-1}, z, h_{x+}, w_3^{-1}, w_4^{-1}\}$$

が得られる。以下同様に，

$$\{t \in \mathcal{O} | t(He(1)) = He(3)\} = \{x^{-1}, y, z^2, h_{z+}, w_2^{-1}, w_4\}$$
$$\{t \in \mathcal{O} | t(He(1)) = He(4)\} = \{x, y^2, z^{-1}, h_{y+}, w_2, w_3\}$$
$$\{t \in \mathcal{O} | t(He(2)) = He(3)\} = \{x, y^2, z, h_{y-}, w_1^{-1}, w_4^{-1}\}$$
$$\{t \in \mathcal{O} | t(He(2)) = He(4)\} = \{x^{-1}, y^{-1}, z^2, h_{z-}, w_1, w_3^{-1}\}$$
$$\{t \in \mathcal{O} | t(He(3)) = He(4)\} = \{x^2, y, z, h_{x-}, w_1^{-1}, w_2^{-1}\}$$

であり，$t \in \{t \in \mathcal{O} | t(He(i)) = He(j)\}$ により，積の順序を行列の演算の形式として，$t^{-1}\mathcal{D}_3(j)t = \mathcal{D}_3(i)$ となる。

生成元としては，

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_3(1) &= \langle w_1, h_{x-}\rangle = \langle w_1, h_{y-}\rangle = \langle w_1, h_{z-}\rangle \\ &= \langle h_{x-}, h_{y-}\rangle = \langle h_{y-}, h_{z-}\rangle = \langle h_{z-}, h_{x-}\rangle\end{aligned}$$

等が選べる。

○ 位数 4 の群

位数 4 の群は 7 個あるが，3 つの共役類に分けられる。3 個の 位数 4 の巡回群と 3 個の 2 面体群，および 1 個の偶置換のみからなる群の 3 種である。

- 巡回群は，

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= \{e, x, x^2, x^{-1}\} \\ \sim \langle y\rangle &= \{e, y, y^2, y^{-1}\} \\ \sim \langle z\rangle &= \{e, z, z^2, z^{-1}\}\end{aligned}$$

の 3 個で，それぞれ以下のように，位数 8 の 2 面体群の正規部分群となっている。

$$\langle x\rangle \lhd \mathcal{D}_4(x), \quad \langle y\rangle \lhd \mathcal{D}_4(y), \quad \langle z\rangle \lhd \mathcal{D}_4(z)$$

- 2 面体群は，以下の 3 個。

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_2(x) &= \{e, x^2, h_{x+}, h_{x-}\} \\ \sim \mathcal{D}_2(y) &= \{e, y^2, h_{y+}, h_{y-}\} \\ \sim \mathcal{D}_2(z) &= \{e, z^2, h_{z+}, h_{z-}\}\end{aligned}$$

これらも，位数 8 の 2 面体群の正規部分群となっている。

$$\mathcal{D}_2(x) \lhd \mathcal{D}_4(x), \quad \mathcal{D}_2(y) \lhd \mathcal{D}_4(y), \quad \mathcal{D}_2(z) \lhd \mathcal{D}_4(z)$$

- 偶置換 からなるものは以下の群。

$$\mathcal{G}_4 = \{e, x^2, y^2, z^2\}$$

$\mathcal{G}_4$ は $\mathcal{T}_{12}, \mathcal{O}$ の正規部分群となっている。

$$\mathcal{G}_4 \triangleleft \mathcal{T}_{12}, \quad \mathcal{G}_4 \triangleleft \mathcal{O}$$

○ 位数 **3** の群

位数 3 の群は以下の 4 個の巡回群である。

$$\langle w_j \rangle = \{e, w_j, w_j^{-1}\} \ \ (j = 1, 2, 3, 4)$$

これらはすべて共役である。

$$\langle w_1 \rangle \sim \langle w_2 \rangle \sim \langle w_3 \rangle \sim \langle w_4 \rangle$$

さらに, 位数 6 の 2 面体群の正規部分群となっている。

$$\langle w_j \rangle \triangleleft \mathcal{D}_3(j) \ \ (j = 1, 2, 3, 4)$$

○ 位数 **2** の群

位数 2 の元は 9 個存在し, 共役類は 2 個ある。

$$\langle x^2 \rangle \sim \langle y^2 \rangle \sim \langle z^2 \rangle$$
$$\langle h_{x+} \rangle \sim \langle h_{x-} \rangle \sim \langle h_{y+} \rangle \sim \langle h_{y-} \rangle \sim \langle h_{z+} \rangle \sim \langle h_{z-} \rangle$$

3.2 部分群の関係

以上の部分群をもとに各部分群についての包含関係を整理する。以下,
$\begin{array}{c} G \\ | \\ H \end{array}$ により, H が G の部分群であることを表すことにする。

- $\mathcal{T}_{12}$ を含む関係

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathcal{O} \arrow[d, dash] & \\
& \mathcal{T}_{12} \arrow[d, dash] & \\
& \mathcal{G}_4 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\langle x^2\rangle \arrow[dr, dash] & \langle y^2\rangle \arrow[d, dash] & \langle z^2\rangle \arrow[dl, dash] \\
& \{e\} &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathcal{O} \arrow[d, dash] & & \\
& \mathcal{T}_{12} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\langle w_1\rangle \arrow[dr, dash] & \langle w_2\rangle \arrow[d, dash] & \langle w_3\rangle \arrow[dl, dash] & \langle w_4\rangle \arrow[dll, dash] \\
& \{e\} & &
\end{tikzcd}$$

- 位数 8 の 2 面体群を含む関係

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & \mathcal{O} \arrow[d, dash] & & \\
& & \mathcal{D}_4(x) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
& \mathcal{G}_4 \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \langle x\rangle \arrow[d, dash] & \mathcal{D}_2(x) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\langle z^2\rangle \arrow[drr, dash] & \langle y^2\rangle \arrow[dr, dash] & \langle x^2\rangle \arrow[d, dash] & \langle h_{x+}\rangle \arrow[dl, dash] & \langle h_{x-}\rangle \arrow[dll, dash] \\
& & \{e\} & &
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{D}_4(y)$, $\mathcal{D}_4(z)$ についても同様の関係がある。

- 位数 6 の 2 面体群を含む関係

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathcal{O} \arrow[d, dash] & & \\
& \mathcal{D}_3(1) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\langle w_1\rangle \arrow[dr, dash] & \langle h_{x-}\rangle \arrow[d, dash] & \langle h_{y-}\rangle \arrow[dl, dash] & \langle h_{z-}\rangle \arrow[dll, dash] \\
& \{e\} & &
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{D}_3(j)$ $(j = 2, 3, 4)$ についても同様の関係がある。

4　$\mathcal{O}$ の表現と構造

$\mathbb{R}^3$ の中に正 8 面体の頂点を座標 $(\pm1,0,0),(0,\pm1,0),(0,0,\pm1)$ により設定し，それをもとに正 8 面体群 $\mathcal{O}$ を $SO(3)$ の中に表現した。この正 8 面体の表示が非常に単純であることが，この表現を単純なものとしている。その結果

$$\mathcal{O} \subset SO(3) \cap SL(3,\mathbb{Z})$$

という非常に簡単な行列のみで表示されるような表現を求めることができた。これは各行列の成分が $\{-1,0,1\}$ に含まれているような $SO(3)$ の行列として特徴付けることができる。各成分が整数で，かつ直交行列であることから，各行各列を構成するベクトルは $(\pm1,0,0),(0,\pm1,0),(0,0,\pm1)$ のいずれかとなり，組み合せ的に

$$\begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \\ 0 & \pm1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm1 & 0 \\ \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \\ \pm1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm1 \\ \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm1 \\ 0 & \pm1 & 0 \\ \pm1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

の形の行列 (複号任意) が得られる。これら 48 個の行列は，行列式が ±1 となっているが，$\mathcal{O}$ はそのうち，行列式が 1 となっているものの全体として求められる。したがって，

命題　$\mathcal{O} = SO(3) \cap SL(3,\mathbb{Z})$

が得られた。この表示は正 8 面体に関する幾何学的な図形と部分群の関係を誘導し，$\mathcal{O}$ の構造の解析に有効な方法を提供していることは前節で見た通りである。

さらに，この 48 個の行列は，正 8 面体の鏡映を許した合同変換の全体からなる群，2 項 8 面体群 $\tilde{\mathcal{O}}$ を構成する。$\tilde{\mathcal{O}}$ の変換は，$\mathcal{O}$ の変換およびその各成分の符号を反転させたもの全体からなる。

$$\tilde{\mathcal{O}} = \left\langle \mathcal{O}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

また，

$$\{e\} \lhd \langle u^2 \rangle \lhd \mathcal{G}_4 \lhd \mathcal{T}_{12} \lhd \mathcal{O}$$

なる組成列を得ることができた。これより, $\mathcal{O} \simeq \mathfrak{S}_4$ が可解群であることも確認できる。

正多面体には他に 4 種あり, 正多面体群は同型なものが 2 種あるが, 正 8 面体群より複雑なものとしては正 12 面体群 $\simeq$ 正 20 面体群がある。これについては, 別の機会に取り上げたいと考えている。