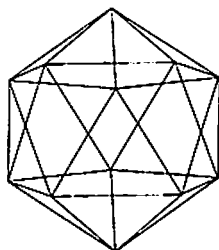


正20面体群の構造

北 川 正 一

1 正 20 面体

正 20 面体は正 3 角形 20 個からなる正多面体であり、3 次元空間の中の正多面体では面の数が最大のものである。



1つの頂点には 5 個の正 3 角形が集まっており、シュレーフリの記号では $(p, q) = (3, 5)$ と表示される。これより、

$$\text{頂点の数 } V = \frac{4p}{4 - (p-2)(q-2)} = 12$$

$$\text{辺の数 } E = \frac{2pq}{4 - (p-2)(q-2)} = 30$$

$$\text{面の数 } F = \frac{4q}{4 - (p-2)(q-2)} = 20$$

となることが確認できる。正 12 面体 (5.3) とは双対の関係にあり、合同変換群は同型となるので、正 12 面体群に関する性質のほとんどは正 20 面体群の性質として理解することができる。

本論では、[1] に続き、正 20 面体に関する対称群- 正 20 面体群 I - について考察する。

2 正 20 面体群 I

正 20 面体 I_c の外接球の中心を O とし、回転対称の軸を

- (1) O と 頂点を通る直線
- (2) O と 辺の中点を通る直線
- (3) O と 面の重心を通る直線

の 3 種類に分類すると、以下の表のように変換の数を整理することができる。以降、この分類に従い、これらの直線を軸とする回転を (1) 型、(2) 型、(3) 型と呼ぶことにする。

| 型 | 対称軸の数 | 回転角 | 変換の数 |
|-----|------------|------------------------------|--------------------------|
| (1) | $6 = V/2$ | $2k\pi/5 \ (k = 1, 2, 3, 4)$ | $24 = V/2 \cdot (q - 1)$ |
| (2) | $15 = E/2$ | π | $15 = E/2$ |
| (3) | $10 = F/2$ | $2k\pi/3 \ (k = 1, 2)$ | $20 = F/2 \cdot (p - 1)$ |

これより、変換の総数を求めると $1 + 24 + 15 + 20 = 60$ 個となる。このうち、(1) 型は位数 5 の変換、(2) 型は位数 2 の変換、(3) 型は位数 3 の変換である。正 20 面体群 I はこれら 60 個の変換を続けて実行することを積として定義される群である。

2.1 置換群としての解釈

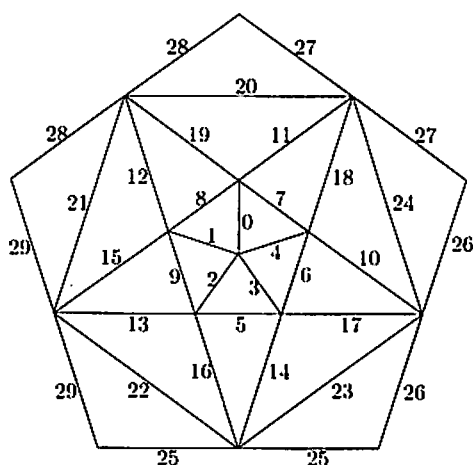
この節では、 I の置換群としての特徴付けについて考える。

正 20 面体 I_c の合同変換は、その辺の置換を引き起こす。 $E = 30$ であるので、この変換群は 30 次対称群 S_{30} の中に表現される。 I の構造を調べるため、辺に番号 $0 \sim 29$ を付ける。正 20 面体の辺の中点 30 個から適切に 6 点を選ぶと正 8 面体の頂点を構成するようにできることに着目し、番号付けは以下の規則に従う。

○ 30 個の中点を 6 個ずつそれぞれが正 8 面体の頂点となるように 5 組に分割する。

○ 各組の辺には mod 5 で分類したときに同じ数となるような番号を割り当てる。

例えば、 $\{0, 5, 10, 15, 20, 25\}$ はこの 6 個で各中点が正 8 面体の頂点を構成するように設定する。 I_c の展開図上に、上記の条件に合うように番号付けした 1 例が次の図である。



$E_{30} = \{0, 1, 2, \dots, 29\}$, $E_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ に対し, $p: E_{30} \rightarrow E_5$ を $p(k) = k \bmod 5$ と定める。これにより $r \in \mathcal{I} \subset \mathfrak{S}_{30}$ について, 以下の図式が可換となる。

$$\begin{array}{ccc}
 E_{30} & \xrightarrow{r} & E_{30} \\
 p \downarrow & & \downarrow p \\
 E_5 & \xrightarrow{r} & E_5
 \end{array}$$

ここに, r は r から誘導される置換で, \mathfrak{S}_5 の変換とみなすことができる。

幾何学的に解釈すれば, 正 20 面体には対称性の高い形で 5 個の正 8 面体が内接しており, 正 20 面体群はそれらの置換の群として捉えられると理解される。さらに, 位数 2 の変換について, その置換表現を調べると, 互換 2 個の積となっている。位数 3 および 5 の変換は巡回置換であり, それらも偶置換である。位数についても, 5 次交代群の位数 60 に一致している。以上から, 正 20 面体群は 5 次交代群に同型であるという結論が得られる。

$$\mathcal{I} \simeq \mathfrak{A}_5$$

これで正 20 面体群の置換群としての構造が明らかとなった。

2.2 行列表示

3 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 に 12 個の点を以下のようにとる。

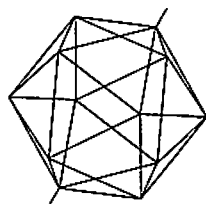
$$(\pm 1, \pm \tau, 0), \quad (0, \pm 1, \pm \tau), \quad (\pm \tau, 0, \pm 1)$$

ここで、複号は任意で $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ は黄金比の定数である。この 12 点は正 20 面体の頂点を形成している。本節では、この正 20 面体に $SO(3)$ の変換を作用させ正 20 面体群の表現を求めることにする。

以下 \mathbb{R}^3 において、 $(x, y, z) = t(\alpha, \beta, \gamma)$, $t \in \mathbb{R}$ で表示される原点 $(0, 0, 0)$ を通る直線を $\ell_{[\alpha:\beta:\gamma]}$ と表記する。

(1) 型

回転軸は $\ell_{[1:\pm\tau:0]}$, $\ell_{[0:1:\pm\tau:0]}$, $\ell_{[\pm\tau:0:1]}$ の $V/2 = 6$ 本。 $\ell_{[\alpha:\beta:\gamma]}$ を軸とする (1) 型の回転を $p_{[\alpha:\beta:\gamma]}$ と書くことにする (回転の向きは表示に従うものとする) と、その行列表示は以下になる。いずれも位数は 5 である。



$$p_{[1:\tau:0]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & \tau & -1 \\ -\tau & 1 & \tau^{-1} \end{pmatrix}$$

$$p_{[1:\tau:0]}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & \tau & 1 \\ \tau & 1 & -\tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix}$$

$$p_{[1:\tau:0]}^3 = p_{[1:\tau:0]}^{-2} = {}^t p_{[1:\tau:0]}^2$$

$$p_{[1:\tau:0]}^4 = p_{[1:\tau:0]}^{-1} = {}^t p_{[1:\tau:0]}$$

$$p_{[1:-\tau:0]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & \tau & -1 \\ \tau & 1 & \tau^{-1} \end{pmatrix}$$

$$p_{[1:-\tau:0]}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & -\tau & -1 \\ -\tau & 1 & -\tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix}$$

$$p_{[1:-\tau:0]}^3 = p_{[1:-\tau:0]}^{-2} = {}^t p_{[1:-\tau:0]}^2$$

$$p_{[1:-\tau:0]}^4 = p_{[1:-\tau:0]}^{-1} = {}^t p_{[1:-\tau:0]}$$

$$p_{[0:1:\tau]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & -\tau & 1 \\ \tau & 1 & \tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & \tau \end{pmatrix}$$

$$p_{[0:1:\tau]}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & -1 & \tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & \tau & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_{[0:1:\tau]}^3 = p_{[0:1:\tau]}^{-2} = {}^t p_{[0:1:\tau]}^2$$

$$p_{[0:1:\tau]}^4 = p_{[0:1:\tau]}^{-1} = {}^t p_{[0:1:\tau]}$$

$$p_{[0:1:-\tau]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & -\tau & -1 \\ \tau & 1 & -\tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & \tau \end{pmatrix}$$

$$p_{[0:1:-\tau]}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & -1 & -\tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & -\tau & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_{[0:1:-\tau]}^3 = p_{[0:1:-\tau]}^{-2} = {}^t p_{[0:1:-\tau]}^2$$

$$p_{[0:1:-\tau]}^4 = p_{[0:1:-\tau]}^{-1} = {}^t p_{[0:1:-\tau]}$$

$$p_{[\tau:0:1]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & -1 & \tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & \tau & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_{[\tau:0:1]}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & -\tau & -1 \\ \tau & 1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix}$$

$$p_{[\tau:0:1]}^3 = p_{[\tau:0:1]}^{-2} = {}^t p_{[\tau:0:1]}^2$$

$$p_{[\tau:0:1]}^4 = p_{[\tau:0:1]}^{-1} = {}^t p_{[\tau:0:1]}$$

$$p_{[-\tau:0:1]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & -1 & -\tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_{[-\tau:0:1]}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & -\tau & 1 \\ -\tau & -1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix}$$

$$p_{[-\tau:0:1]}^3 = p_{[-\tau:0:1]}^{-2} = {}^t p_{[-\tau:0:1]}^2$$

$$p_{[-\tau:0:1]}^4 = p_{[-\tau:0:1]}^{-1} = {}^t p_{[-\tau:0:1]}$$

(2) 型

辺の中点の座標を求めると

$$(\pm\tau, 0, 0), \quad (0, \pm\tau, 0, 0), \quad (0, 0, \pm\tau),$$

$$(\pm\frac{\tau}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\tau^2}{2}), \quad (\pm\frac{\tau^2}{2}, \pm\frac{\tau}{2}, \pm\frac{1}{2}),$$

$$(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\tau^2}{2}, \pm\frac{\tau}{2}) \quad (\text{複号任意})$$

となり、原点 O と上記の点を結ぶ直線が回転軸となる。それらは

$$\ell_{[1:0:0]}, \quad \ell_{[0:1:0]}, \quad \ell_{[0:0:1]}, \quad \ell_{[1:\pm\tau^{-1}:\pm\tau]},$$

$$\ell_{[\pm\tau:1:\pm\tau^{-1}]}, \quad \ell_{[\pm\tau^{-1}:\pm\tau:1]}$$

の $E/2 = 15$ 本。

$\ell_{[\alpha:\beta:\gamma]}$ を軸とする (2) 型の回転を $h_{[\alpha:\beta:\gamma]}$ と表記する。位数は 2 で、行列表示は以下ようになる。

$$h_{[1:0:0]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$h_{[0:1:0]} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

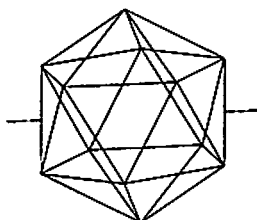
$$h_{[0:0:1]} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{[1:\tau^{-1}:\tau]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & -\tau & 1 \\ \tau & 1 & \tau^{-1} \end{pmatrix}$$

$$h_{[1:\tau^{-1}:-\tau]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & -\tau & -1 \\ -\tau & -1 & \tau^{-1} \end{pmatrix}$$

$$h_{[1:-\tau^{-1}:-\tau]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & 1 \\ -\tau & 1 & \tau^{-1} \end{pmatrix}$$

$$h_{[1:-\tau^{-1}:\tau]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & -1 \\ \tau & -1 & \tau^{-1} \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned}
h_{\{\tau;1;\tau^{-1}\}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & \tau & 1 \\ \tau & -1 & \tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix} \\
h_{\{\tau;1;-\tau^{-1}\}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & \tau & -1 \\ \tau & -1 & -\tau^{-1} \\ -1 & -\tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix} \\
h_{\{-\tau;1;\tau^{-1}\}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & -\tau & -1 \\ -\tau & -1 & \tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix} \\
h_{\{-\tau;1;-\tau^{-1}\}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau^{-1} & -\tau & 1 \\ -\tau & -1 & -\tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & -\tau \end{pmatrix} \\
h_{\{\tau^{-1};\tau;1\}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & 1 & \tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & \tau & -1 \end{pmatrix} \\
h_{\{-\tau^{-1};-\tau;1\}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & 1 & -\tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & -1 \end{pmatrix} \\
h_{\{-\tau^{-1};\tau;1\}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & -1 & -\tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & \tau & -1 \end{pmatrix} \\
h_{\{\tau^{-1};-\tau;1\}} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau & -1 & \tau^{-1} \\ -1 & \tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & -\tau & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(3) 型

面の重心の座標は

$$(\pm \frac{\tau^2}{3}, \pm \frac{\tau^2}{3}, \pm \frac{\tau^2}{3}), \quad (0, \pm \frac{\tau^3}{3}, \pm \frac{\tau}{3}),$$

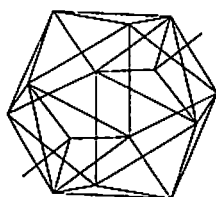
$$(\pm \frac{\tau}{3}, 0, \pm \frac{\tau^3}{3}), \quad (\pm \frac{\tau^3}{3}, \pm \frac{\tau}{3}, 0)$$

(複号任意) となる。回転軸は原点 O と上記の点を結ぶ以下の 10 本である。

$$\ell_{[1;\pm 1;\pm 1]}, \quad \ell_{[0;\tau;\pm \tau^{-1}]},$$

$$\ell_{[\pm \tau^{-1};0;\tau]}, \quad \ell_{[\tau;\pm \tau^{-1};0]}.$$

$\ell_{[\alpha;\beta;\gamma]}$ を軸とする (3) 型の回転を $w_{[\alpha;\beta;\gamma]}$ と表記することにする (回転の向き



は表示に従うものとする)。(3)型の回転は位数3であることに注意。

$$\begin{aligned}
 w_{[1:1:1]} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 w_{[1:1:1]}^2 &= w_{[1:1:1]}^{-1} = {}^t w_{[1:1:1]} \\
 w_{[1:1:-1]} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 w_{[1:1:-1]}^2 &= w_{[1:1:-1]}^{-1} = {}^t w_{[1:1:-1]} \\
 w_{[1:-1:-1]} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 w_{[1:-1:-1]}^2 &= w_{[1:-1:-1]}^{-1} = {}^t w_{[1:-1:-1]} \\
 w_{[1:-1:1]} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 w_{[1:-1:1]}^2 &= w_{[1:-1:1]}^{-1} = {}^t w_{[1:-1:1]} \\
 w_{[0:\tau:\tau^{-1}]} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & \tau & 1 \\ -\tau & 1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix} \\
 w_{[0:\tau:\tau^{-1}]}^2 &= w_{[0:\tau:\tau^{-1}]}^{-1} = {}^t w_{[0:\tau:\tau^{-1}]} \\
 w_{[0:\tau:-\tau^{-1}]} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & \tau & -1 \\ \tau & -1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix} \\
 w_{[0:\tau:-\tau^{-1}]}^2 &= w_{[0:\tau:-\tau^{-1}]}^{-1} = {}^t w_{[0:\tau:-\tau^{-1}]} \\
 w_{[\tau^{-1}:0:\tau]} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & -\tau & 1 \\ \tau & -1 & -\tau^{-1} \\ 1 & \tau^{-1} & \tau \end{pmatrix} \\
 w_{[\tau^{-1}:0:\tau]}^2 &= w_{[\tau^{-1}:0:\tau]}^{-1} = {}^t w_{[\tau^{-1}:0:\tau]} \\
 w_{[-\tau^{-1}:0:\tau]} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\tau^{-1} & -\tau & -1 \\ \tau & -1 & \tau^{-1} \\ -1 & -\tau^{-1} & \tau \end{pmatrix} \\
 w_{[-\tau^{-1}:0:\tau]}^2 &= w_{[-\tau^{-1}:0:\tau]}^{-1} = {}^t w_{[-\tau^{-1}:0:\tau]}
 \end{aligned}$$

$$w_{[\tau:\tau^{-1}:0]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & 1 & \tau^{-1} \\ 1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & \tau & -1 \end{pmatrix}$$

$$w_{[\tau:\tau^{-1}:0]}^2 = w_{[\tau:\tau^{-1}:0]}^{-1} = {}^t w_{[\tau:\tau^{-1}:0]}$$

$$w_{[\tau:-\tau^{-1}:0]} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tau & -1 & -\tau^{-1} \\ -1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & \tau & -1 \end{pmatrix}$$

$$w_{[\tau:-\tau^{-1}:0]}^2 = w_{[\tau:-\tau^{-1}:0]}^{-1} = {}^t w_{[\tau:-\tau^{-1}:0]}$$

2.3 行列の代数的量

\mathcal{I} に属する行列について、代数的な諸量を示す。

固有値

| | |
|-------|---|
| (1) 型 | 回転角 $\frac{2\pi}{5}$: $1, \zeta_5, \overline{\zeta_5}$ 回転角 $\frac{4\pi}{5}$: $1, \zeta_5^2, \overline{\zeta_5^2}$ $(\zeta_5 = \cos \frac{2\pi}{5} + \sqrt{-1} \sin \frac{2\pi}{5})$ |
| (2) 型 | $1, -1, -1$ |
| (3) 型 | $1, \omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \overline{\omega} = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ |

トレース

| | |
|-------|---|
| (1) 型 | 回転角 $\frac{2\pi}{5}$: $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, 回転角 $\frac{4\pi}{5}$: $-\tau^{-1} = 1 - \tau$ |
| (2) 型 | -1 |
| (3) 型 | 0 |

(1) 型の回転は回転角により、2 種類の共役類に分けられ、(2) 型および (3) 型の回転はそれぞれすべて共役である。

2.4 置換表現

2.1 節で示したように、 \mathcal{I} はその中点が正 8 面体の頂点を構成する 6 本 5 組の辺の置換の群と捉えることができる。2.1 節の図において、番号 0, 1, 2, 3, 4 が指定された辺の集まる頂点を (0, -1, τ), 4, 6, 10, 18, 7 の集まる頂

点を $(\tau, 0, 1)$, $0, 7, 11, 19, 8$ の集まる頂点を $(0, 1, \tau)$ に対応付け, 変換を $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ の置換 (\mathfrak{S}_5 の元) として表現する。

(1) 型

$$\begin{aligned}
 p_{[\tau:0:1]} &= (0\ 3\ 2\ 4\ 1), & p_{[\tau:0:1]}^2 &= (0\ 2\ 1\ 3\ 4), \\
 p_{[\tau:0:1]}^{-1} &= (0\ 1\ 4\ 2\ 3), & p_{[\tau:0:1]}^{-2} &= (0\ 4\ 3\ 1\ 2), \\
 p_{[-\tau:0:1]} &= (0\ 4\ 1\ 3\ 2), & p_{[-\tau:0:1]}^2 &= (0\ 1\ 2\ 4\ 3), \\
 p_{[-\tau:0:1]}^{-1} &= (0\ 2\ 3\ 1\ 4), & p_{[-\tau:0:1]}^{-2} &= (0\ 3\ 4\ 2\ 1), \\
 p_{[1:\tau:0]} &= (0\ 1\ 3\ 4\ 2), & p_{[1:\tau:0]}^2 &= (0\ 3\ 2\ 1\ 4), \\
 p_{[1:\tau:0]}^{-1} &= (0\ 2\ 4\ 3\ 1), & p_{[1:\tau:0]}^{-2} &= (0\ 4\ 1\ 2\ 3), \\
 p_{[1:-\tau:0]} &= (0\ 4\ 2\ 1\ 3), & p_{[1:-\tau:0]}^2 &= (0\ 2\ 3\ 4\ 1), \\
 p_{[1:-\tau:0]}^{-1} &= (0\ 3\ 1\ 2\ 4), & p_{[1:-\tau:0]}^{-2} &= (0\ 1\ 4\ 3\ 2), \\
 p_{[0:1:\tau]} &= (0\ 2\ 1\ 4\ 3), & p_{[0:1:\tau]}^2 &= (0\ 1\ 3\ 2\ 4), \\
 p_{[0:1:\tau]}^{-1} &= (0\ 3\ 4\ 1\ 2), & p_{[0:1:\tau]}^{-2} &= (0\ 4\ 2\ 3\ 1), \\
 p_{[0:1:-\tau]} &= (0\ 1\ 2\ 3\ 4), & p_{[0:1:-\tau]}^2 &= (0\ 2\ 4\ 1\ 3), \\
 p_{[0:1:-\tau]}^{-1} &= (0\ 4\ 3\ 2\ 1), & p_{[0:1:-\tau]}^{-2} &= (0\ 3\ 1\ 4\ 2)
 \end{aligned}$$

(2) 型

$$\begin{aligned}
 h_{[1:0:0]} &= (1\ 4)(2\ 3), & h_{[0:1:0]} &= (1\ 3)(2\ 4), & h_{[0:0:1]} &= (1\ 2)(3\ 4), \\
 h_{[1:\tau^{-1}:-\tau]} &= (0\ 4)(2\ 3), & h_{[\tau^{-1}:\tau:1]} &= (0\ 2)(3\ 4), & h_{[\tau:-1:\tau^{-1}]} &= (0\ 3)(2\ 4), \\
 h_{[1:\tau^{-1}:\tau]} &= (0\ 3)(1\ 4), & h_{[\tau^{-1}:\tau:-1]} &= (0\ 1)(3\ 4), & h_{[-\tau:1:\tau^{-1}]} &= (0\ 4)(1\ 3), \\
 h_{[-1:\tau^{-1}:\tau]} &= (0\ 2)(1\ 4), & h_{[\tau^{-1}:-\tau:1]} &= (0\ 4)(1\ 2), & h_{[\tau:1:\tau^{-1}]} &= (0\ 1)(2\ 4), \\
 h_{[1:-\tau^{-1}:\tau]} &= (0\ 1)(2\ 3), & h_{[-\tau^{-1}:\tau:1]} &= (0\ 3)(1\ 2), & h_{[\tau:1:-\tau^{-1}]} &= (0\ 2)(1\ 3)
 \end{aligned}$$

(3) 型

$$\begin{aligned}
 w_{[1:1:1]} &= (1\ 2\ 3), & w_{[1:1:1]}^{-1} &= (1\ 3\ 2), \\
 w_{[1:1:-1]} &= (1\ 4\ 2), & w_{[1:1:-1]}^{-1} &= (1\ 2\ 4), \\
 w_{[-1:1:1]} &= (2\ 4\ 3), & w_{[-1:1:1]}^{-1} &= (2\ 3\ 4), \\
 w_{[1:-1:1]} &= (1\ 3\ 4), & w_{[1:-1:1]}^{-1} &= (1\ 4\ 3), \\
 w_{[\tau^{-1}:0:\tau]} &= (0\ 4\ 2), & w_{[\tau^{-1}:0:\tau]}^{-1} &= (0\ 2\ 4), \\
 w_{[-\tau^{-1}:0:\tau]} &= (0\ 3\ 1), & w_{[-\tau^{-1}:0:\tau]}^{-1} &= (0\ 1\ 3), \\
 w_{[\tau:\tau^{-1}:0]} &= (0\ 4\ 3), & w_{[\tau:\tau^{-1}:0]}^{-1} &= (0\ 3\ 4), \\
 w_{[\tau:-\tau^{-1}:0]} &= (0\ 1\ 2), & w_{[\tau:-\tau^{-1}:0]}^{-1} &= (0\ 2\ 1), \\
 w_{[0:\tau:\tau^{-1}]} &= (0\ 4\ 1), & w_{[0:\tau:\tau^{-1}]}^{-1} &= (0\ 1\ 4), \\
 w_{[0:\tau:-\tau^{-1}]} &= (0\ 2\ 3), & w_{[0:\tau:-\tau^{-1}]}^{-1} &= (0\ 3\ 2)
 \end{aligned}$$

以上すべて偶置換である。

3 部分群

本節では、正 20 面体群 I の部分群について考察する。部分群として可能性があるのは、単位群および I 自身を除くと、 I の位数 60 の約数である 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 を位数に持つものである。

まず、以下の命題を準備しておく。

命題 3.1. $x, y \in I$ に対し、 $\#(x) = 5$, $y \notin \langle x \rangle$ とする。 $\#(y) > 2$ または y の回転軸が x の回転軸と直交しないならば、 $\langle x, y \rangle = I$ となる。

証明 y の位数が 3 または 5 の場合、共役 $y^{-1}xy$ を考えると、これは x, y のいずれとも回転軸の異なる位数 5 の回転となる。また、 y の位数が 2 の場合も x の回転軸と y の回転軸が直交していないならば、 $y^{-1}xy$ は x と回転軸の異なる位数 5 の回転となる。これより、 $\langle x, y \rangle$ は位数 5 の回転を少なくとも 2 方向以上の軸に関して含むことになるが、すべての共役を考えると、結局全ての方向の位数 5 の回転を含まなくてはならない。位数 5 の回転は 24 個あるから、部分群の位数の条件から、 $\langle x, y \rangle$ はこの他に 位数 2 または 位数 3 の回転 z を含むことになる。位数 5 の回転を続けて実行することにより、1 つの辺を任意の辺へ、1 つの面を任意の面へ移すことが可能であるので、 z の共役を考えると z と位数の等しいすべての回転を構成することができる。したがって、 $\langle x, y \rangle$ はすべての位数 5 の回転に加え、すべての位数 2 または 3 の回転を含むことになる。その結果 $\langle x, y \rangle$ の総数は 30 を越え、 $\langle x, y \rangle = I$ となる。

命題 3.2. $x, y \in I$ に対し、 $\#(x) = \#(y) = 3$, $\langle x \rangle \neq \langle y \rangle$ とする。 x の回転軸が通る面と y の回転軸が通る面が辺を共有すれば、 $\langle x, y \rangle = I$ となる。

証明 1 つの位数 3 の回転に対し、その軸は 2 枚の面を通ることに注意する。 $\langle x \rangle \neq \langle y \rangle$ より、 x の軸が通る面と y の軸が通る面には 1 つの辺をはさんで隣り合っている。 x とその共役 xyx^{-1} , $y^{-1}xy$ により、 y の軸を通る面に対して、辺を共有する位置にある 3 つの面の重心を通る軸を持つ位数 3 の回転が得られる。それを繰り返すことにより、すべての位数 3 の回転を構成することができる。位数 3 の回転は総数 20 個あるので、それらをすべて含む部分群は単位元を含めると位数 21 以上となり、位数 2 または 位数 5 の回転 z を要素として持たなければならぬ。また、位数 3 の回転を続けて行うことにより、1 つの辺を任意の辺へ、1 つの頂点を任意の頂点へ移すことができる。したがって、 $\langle x, y \rangle$ には z と位数の等しいすべての回転が含まれる。その位数は 30 より大きくなり、 I に一致することになる。

詳しく調べると、 I の単位群でない真部分群に対しては、位数 3 の回転の軸

の数は 1 または 4 のいずれかとなっている。軸の数が 4 本の場合、回転軸が定める 8 個の面の重心は、立方体の頂点の位置にある。軸の数が 1 の場合は、位数 3 の回転を 2 個のみ含む場合である。2 方向含む場合は、共役を考えることにより必然的に 4 方向以上含まなくてはならない。また、5 方向以上含む場合は、命題 3.2 の条件が成立し、その群は \mathcal{I} と一致する。

位数 2 の回転については次のことが成立する。

命題 3.3. $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{I}$ を 3 つの位数 2 の回転とする。 x_1, x_2, x_3 の回転軸の通る辺が一つの頂点に集まっているならば、 $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \mathcal{I}$ となる。

証明 一つの頂点に集まる辺の数は 5 個であるので、そのうちの 3 個の中には一つの面の境界となっているものが 2 個以上存在する。そのような 2 つの辺の中点を通る軸を持つ回転を x_1, x_2 とすると、 $p = x_1 x_2$ は位数 5 の回転となる。 p の回転軸は x_1, x_2 の軸と直交しており、 x_3 の軸とは直交しない。したがって、命題 3.1 より、 $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = \langle p, x_3 \rangle = \mathcal{I}$ となる。

位数 2 の回転の軸が同一平面上にあるのは、位数 5 の 1 つの回転の軸に直交している 5 本までで、6 本の軸は同一平面上には収まらない。したがって、位数 2 の回転の 6 本の軸の中には必ず 命題 3.3 の条件を満たすような 3 本の軸が含まれ、 \mathcal{I} はその 3 つの回転により生成される。これより、相異なる 6 個以上の位数 2 の回転を含む \mathcal{I} の部分群は \mathcal{I} に一致することもわかる。

さらに [1] に示したものと同様の命題が成立する。

命題 3.4. $x, y \in \mathcal{I}$ に対し、 $\# \langle x \rangle = 2$, $\# \langle y \rangle = k$ とする。 x の回転軸と y の回転軸が直交するとき、 $\langle x, y \rangle \simeq D_k$ となる。ここで、 D_k は k 次の 2 面体群である。

以下、自明な単位群、 \mathcal{I} を除き、部分群をリストアップする。

3.1 巡回群

単位元を除く \mathcal{I} の回転は位数 2, 3, 5 のいずれかであり、位数 2, 3, 5 の部分群はこれらの回転を生成元とする巡回群である。

3.1.1 位数 2 の群

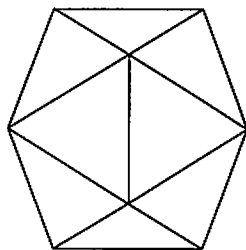
位数 2 の部分群は

$$\langle h_{[\alpha:\beta:\gamma]} \rangle = \{1, h_{[\alpha:\beta:\gamma]}\}$$

の形のもの。 $[\alpha:\beta:\gamma]$ は以下の通り。

$$\begin{aligned} & [1:0:0], & [0:1:0], & [0:0:1], \\ & [1:\tau^{-1}:\tau], & [-\tau:1:\tau^{-1}], & [\tau^{-1}:\tau:-1], \\ & [1:\tau^{-1}:-\tau], & [\tau:-1:\tau^{-1}], & [\tau^{-1}:\tau:1], \\ & [-1:\tau^{-1}:\tau], & [\tau:1:\tau^{-1}], & [\tau^{-1}:-\tau:1], \\ & [1:-\tau^{-1}:\tau], & [\tau:1:-\tau^{-1}], & [-\tau^{-1}:\tau:1] \end{aligned}$$

この型の部分群は位数 2 の回転 (の軸) の数, すなわち $E/2 = 15$ 個あり, すべて共役である。



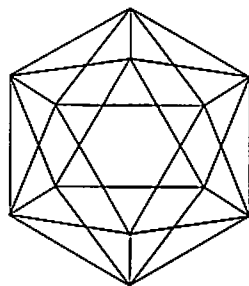
3.1.2 位数 3 の群

位数 3 の部分群は以下の群である。

$$\langle w_{[\alpha:\beta:\gamma]} \rangle = \{1, w_{[\alpha:\beta:\gamma]}, w_{[\alpha:\beta:\gamma]}^{-1}\}$$

この形の部分群は, 位数 3 の回転の軸の数: $F/2 = 10$ 個あり, すべて共役である。回転軸の方向をまとめておく。

$$\begin{aligned} & [1:1:1], & [1:1:-1], \\ & [1:-1:1], & [-1:1:1], \\ & [0:\tau:\tau^{-1}], & [0:\tau:-\tau^{-1}], \\ & [\tau^{-1}:0:\tau], & [-\tau^{-1}:0:\tau], \\ & [\tau:\tau^{-1}:0], & [\tau:-\tau^{-1}:0] \end{aligned}$$



3.1.3 位数 5 の群

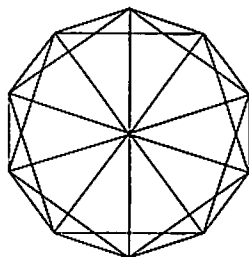
位数 5 の部分群は,

$$\langle p_{[\alpha:\beta:\gamma]} \rangle = \{1, p_{[\alpha:\beta:\gamma]}, p_{[\alpha:\beta:\gamma]}^2, p_{[\alpha:\beta:\gamma]}^{-2}, p_{[\alpha:\beta:\gamma]}^{-1}\}$$

なる巡回群であり, 位数 5 の回転の軸の数: $V/2 = 6$ 個ある。それらはすべて共役である。

回転軸の方向は以下の通り。

$$\begin{aligned} & [\tau:0:1], & [-\tau:0:1], \\ & [1:\tau:0], & [1:-\tau:0], \\ & [0:1:\tau], & [0:1:-\tau] \end{aligned}$$



3.2 2面体群

I の部分群のうち、位数 4, 6, 10 のものは、2面体群に同型である。位数 $2k$ の k 次2面体群 D_k は、位数 2 と 位数 k の元を含んでいる。本節では、命題 3.4 を元に 2面体群に同型な部分群をリストアップする。

3.2.1 D_2

位数 4 の部分群は D_2 に同型である。

$[\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1], [\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2], [\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3]$

をそれぞれ直交する 3 方向とすると、位数 4 の部分群は

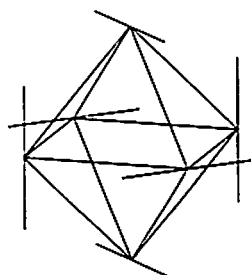
$$\{1, h_{[\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1]}, h_{[\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2]}, h_{[\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3]}\} \simeq D_2$$

と求められる。このような組み合わせは 5 組存在する。

| | | |
|------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| $[\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1],$ | $[\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2],$ | $[\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3]$ |
| $[1 : 0 : 0],$ | $[0 : 1 : 0],$ | $[0 : 0 : 1]$ |
| $[1 : \tau^{-1} : \tau],$ | $[-\tau : 1 : \tau^{-1}],$ | $[\tau^{-1} : \tau : -1]$ |
| $[1 : \tau^{-1} : -\tau],$ | $[\tau : -1 : \tau^{-1}],$ | $[\tau^{-1} : \tau : 1]$ |
| $[-1 : \tau^{-1} : \tau],$ | $[\tau : 1 : \tau^{-1}],$ | $[\tau^{-1} : -\tau : 1]$ |
| $[1 : -\tau^{-1} : \tau],$ | $[\tau : 1 : -\tau^{-1}],$ | $[-\tau^{-1} : \tau : 1]$ |

これより、位数 4 の部分群は 5 個存在し、それらはすべて共役となっていることが確認できた。

これらの直交する 3 本の軸と正 20 面体との交点は、6 個の辺の中点となるが、それらは正 8 面体の頂点の配置にある。部分群の各回転は対応する正 8 面体を固定している。先に見たように、この 8 面体は I の置換表現に密接に関係している。



3.2.2 D_3

位数 6 の部分群は D_3 に同型となっている。位数 3 の回転 w に対し、 w の軸に直交する軸を持つ位数 2 の回転は 3 個存在する。 $[\alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0]$ を w の軸の向きとし、それに直交する位数 2 の回転の軸の方向を

$[\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1], [\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2], [\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3]$
とする。このとき、位数 6 の部分群は以下の形のものである。

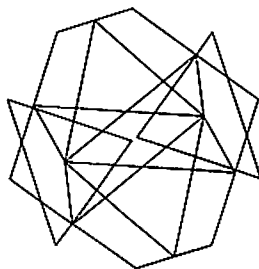
$$\{1, w_{[\alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0]}, w_{[\alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0]}^{-1}, h_{[\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1]}, h_{[\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2]}, h_{[\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3]}\} \simeq D_3$$

この条件を満たす軸の組み合わせは、位数 3 の回転の軸の数だけ存在し、それらは

| 位数 3 | 位数 2 | | |
|-----------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| $[\alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0]$ | $[\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1],$ | $[\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2],$ | $[\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3]$ |
| $[1 : 1 : 1]$ | $[1 : \tau^{-1} : -\tau],$ | $[-\tau : 1 : \tau^{-1}],$ | $[\tau^{-1} : -\tau : 1]$ |
| $[1 : 1 : -1]$ | $[1 : \tau^{-1} : \tau],$ | $[\tau : -1 : \tau^{-1}],$ | $[-\tau^{-1} : \tau : 1]$ |
| $[1 : -1 : 1]$ | $[-1 : \tau^{-1} : \tau],$ | $[\tau : 1 : -\tau^{-1}],$ | $[\tau^{-1} : \tau : 1]$ |
| $[-1 : 1 : 1]$ | $[1 : -\tau^{-1} : \tau],$ | $[\tau : 1 : \tau^{-1}],$ | $[\tau^{-1} : \tau : -1]$ |
| $[0 : \tau : \tau^{-1}]$ | $[1 : 0 : 0],$ | $[1 : \tau^{-1} : -\tau],$ | $[1 : -\tau^{-1} : \tau]$ |
| $[0 : \tau : -\tau^{-1}]$ | $[1 : 0 : 0],$ | $[1 : \tau^{-1} : \tau],$ | $[-1 : \tau^{-1} : \tau]$ |
| $[\tau^{-1} : 0 : \tau]$ | $[0 : 1 : 0],$ | $[\tau : 1 : -\tau^{-1}],$ | $[-\tau : 1 : \tau^{-1}]$ |
| $[-\tau^{-1} : 0 : \tau]$ | $[0 : 1 : 0],$ | $[\tau : -1 : \tau^{-1}],$ | $[\tau : 1 : \tau^{-1}]$ |
| $[\tau : \tau^{-1} : 0]$ | $[0 : 0 : 1],$ | $[\tau^{-1} : -\tau : 1],$ | $[-\tau^{-1} : \tau : 1]$ |
| $[\tau : -\tau^{-1} : 0]$ | $[0 : 0 : 1],$ | $[\tau^{-1} : \tau : 1],$ | $[\tau^{-1} : \tau : -1]$ |

となる。以上から、位数 6 の部分群は 10 個存在し、それらはすべて共役である。

この 1 組 4 本の回転軸と、正 20 面体との 8 個の交点に注目する。位数 2 の回転軸との交点(辺の中点)は正 6 角形を形成し、位数 3 の回転軸との交点の 1 つとの 7 点で六角錐の頂点となる。8 点ではその六角錐を底面で貼り合わせた形となる。 D_3 に同型な部分群の回転はこの六角錐(を貼り合わせたもの)を固定している。



3.2.3 D_5

位数 10 の部分群は D_5 と同型となる。位数 5 の回転 p に対し、回転軸が直交する位数 2 の回転は 5 個存在する。 p の回転軸の向きを $[\alpha_0 : \beta_0 : \gamma_0]$ とし、

それに直交する位数 2 の回転の軸の方向を

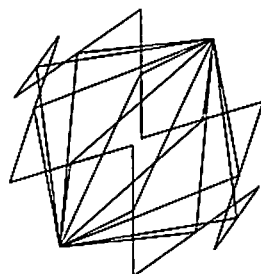
$[\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1], [\alpha_2 : \beta_2 : \gamma_2], [\alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3], [\alpha_4 : \beta_4 : \gamma_4], [\alpha_5 : \beta_5 : \gamma_5]$
とする。このとき、

$\{1, P_{[\alpha_0:\beta_0:\gamma_0]}, P_{[\alpha_0:\beta_0:\gamma_0]}^{-2}, P_{[\alpha_0:\beta_0:\gamma_0]}^{-1}, h_{[\alpha_1:\beta_1:\gamma_1]}, h_{[\alpha_2:\beta_2:\gamma_2]}, h_{[\alpha_3:\beta_3:\gamma_3]}, h_{[\alpha_4:\beta_4:\gamma_4]}, h_{[\alpha_5:\beta_5:\gamma_5]}\} \simeq D_5$
は位数 10 の部分群となる。次表の軸の組 (複号任意) がこの条件を満たす。

| 位数 5 | 位数 2 |
|-------------------|---|
| $[0 : 1 : \tau]$ | $[1 : 0 : 0], [\pm\tau : 1 : -\tau^{-1}], [\pm\tau^{-1} : -\tau : 1]$ |
| $[0 : 1 : -\tau]$ | $[1 : 0 : 0], [\pm\tau : 1 : \tau^{-1}], [\pm\tau^{-1} : \tau : 1]$ |
| $[\tau : 0 : 1]$ | $[0 : 1 : 0], [-\tau^{-1} : \pm\tau : 1], [1 : \pm\tau^{-1} : -\tau]$ |
| $[-\tau : 0 : 1]$ | $[0 : 1 : 0], [\tau^{-1} : \pm\tau : 1], [1 : \pm\tau^{-1} : \tau]$ |
| $[1 : \tau : 0]$ | $[0 : 0 : 1], [1 : -\tau^{-1} : \pm\tau], [-\tau : 1 : \pm\tau^{-1}]$ |
| $[1 : -\tau : 0]$ | $[0 : 0 : 1], [1 : \tau^{-1} : \pm\tau], [\tau : 1 : \pm\tau^{-1}]$ |

この表より、位数 10 の部分群の数が 6 であるという結論が得られる。それらはすべて共役となっている。

この 1 組 6 本の回転軸と、正 20 面体との 12 個の交点は、正 10 角形 (辺の中点) を底面とする 10 角錐を底面で貼り合わせた図形の頂点を形成する。 D_5 に同型な部分群の回転はこの 10 角錐 (を貼り合わせたもの) を固定している。



3.3 その他の部分群

前節までに取り上げた部分群の他に可能性が残るのは、位数 12, 15, 20, 30 の場合である。

部分群の位数を 15 と仮定すると、位数 3 または 5 の回転からなる群となる必要があるが、位数 3 と 5 の回転を含む部分群は、命題 3.1 より I 全体でなければならない。位数 5 の回転だけでは位数 15 になることはあり得ず、位数 3 の回転だけでは軸の数が 4 を越えるので、そのような部分群は命題 3.2 より I 全体となってしまう、いずれの場合も位数の仮定に反する。

位数 20 の場合は、位数 2 または 位数 5 の回転からなるが、命題 3.1 より、位数 5 の回転については、軸の数は 1 つに限られる。よって、位数 5 の回転の

数は4個以下でなければならない。その結果、位数2の回転を15個すべて含む必要があるが、そうなるとその中には位数5の回転軸と直交しない軸を持つものが含まれてしまう。したがって、やはり命題3.1より、そのような群は I 全体に一致せざるを得ない。

位数が30の場合、位数5の回転を含むとすると、上述の通りその数は4でなければならないが、それ以外の24個の中には位数3の回転が必ず含まれてしまうので、そのような群は I と一致することになる。位数3の回転を含むと仮定すると、命題3.2より、その軸の数は4でなければならない。よってその数は8個となるが、その場合位数2の回転をすべて合わせても位数30とはなり得ない。以上より、位数30の部分群は存在し得ないことがわかる。

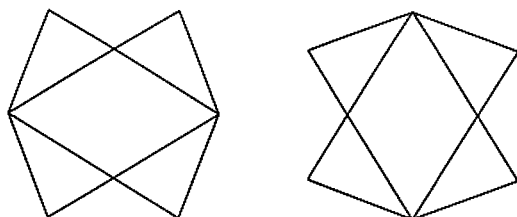
したがって、可能性があるのは位数12の場合のみである。

3.3.1 4交代群

位数12の部分群について考える。含まれる回転は位数2および3のものに限られ、 I は位数6の回転を含まないので、 D_6 と同型な部分群は存在しない。一方、 $I \simeq \mathfrak{A}_5$ であったから、位数12の群である4交代群 \mathfrak{A}_4 に同型な群を部分群に含むことは直ちにわかるが、ここではそれを構成的に示すことにする。同時に位数12の部分群は \mathfrak{A}_4 に同型なものに限られるという結論も得られる。

命題3.3より位数12の部分群の中の位数2の回転の数は5個以下でなければならないから、位数3の回転については軸4本、すなわち8個の回転が含まれている必要がある。これから、位数2の回転は3個であることがわかる。

そこで、先に見た D_2 に同型な位数4の部分群に注目する。位数4の部分群は位数2の回転を3個含み、その軸は互いに直交している。その3本の軸が通る6個の辺を境界に持たない面を特定する。それらは8面あり、重心は立方体の頂点を形成しており、それらを通る回転軸は4本存在する。それらの面は命題3.2より、共有する辺を持たない。



そのような位数 2 の回転 3 個と、位数 3 の回転 8 個、および単位元により位数 12 の部分群が得られる。ここで取り上げた D_2 に同型な部分群には固定する内接正 8 面体が存在していた。それらは 2.4 節での $0, \dots, 4$ の番号に対応しているので、 $Oc(k)$, ($k = 0, \dots, 4$) と表記することにする。

この条件を満たす軸と対応する正 8 面体を分類すると次の表が得られる。

| 部分群 | 位数 2 | 位数 3 | 正 8 面体 |
|-------------|---|--|---------|
| $G_{12}(0)$ | $[1:0:0]$ $[0:1:0]$ $[0:0:1]$ | $[1:1:1], \quad [-1:1:1]$ $[1:-1:1], \quad [1:1:-1]$ | $Oc(0)$ |
| $G_{12}(1)$ | $[1:\tau^{-1}:-\tau]$ $[\tau^{-1}:\tau:1]$ $[\tau:-1:\tau^{-1}]$ | $[-1:1:1], \quad [0:\tau:-\tau^{-1}]$ $[\tau^{-1}:0:\tau], \quad [\tau:\tau^{-1}:0]$ | $Oc(1)$ |
| $G_{12}(2)$ | $[1:\tau^{-1}:\tau]$ $[\tau^{-1}:\tau:-1]$ $[-\tau:1:\tau^{-1}]$ | $[1:-1:1], \quad [0:\tau:\tau^{-1}]$ $[-\tau^{-1}:0:\tau], \quad [\tau:\tau^{-1}:0]$ | $Oc(2)$ |
| $G_{12}(3)$ | $[-1:\tau^{-1}:\tau]$ $[\tau^{-1}:-\tau:1]$ $[\tau:1:\tau^{-1}]$ | $[1:1:-1], \quad [0:\tau:\tau^{-1}]$ $[\tau^{-1}:0:\tau], \quad [\tau:-\tau^{-1}:0]$ | $Oc(3)$ |
| $G_{12}(4)$ | $[1:-\tau^{-1}:\tau]$ $[-\tau^{-1}:\tau:1]$ $[\tau:1:-\tau^{-1}]$ | $[1:1:1], \quad [0:\tau:-\tau^{-1}]$ $[-\tau^{-1}:0:\tau], \quad [\tau:-\tau^{-1}:0]$ | $Oc(4)$ |

位数 12 の部分群は、位数 4 の部分群を含み、その個数と同じく 5 個存在する。それらはすべて共役となっている。

この部分群でも位数 2 の回転の 3 本の軸と正 20 面体との交点を頂点とする正 8 面体 $Oc(k)$ が重要な役割を果たしている。位数 12 の部分群は、 $Oc(k)$ を固定する回転からなる群である。

$$G_{12}(k) = \{r \in \mathcal{I} \mid r(Oc(k)) = Oc(k)\} \quad (k = 0, \dots, 4)$$

置換の形で述べれば、

$$G_{12}(k) \simeq \{\rho \in \mathfrak{A}_5 \mid \rho(k) = k\} \quad (k = 0, \dots, 4)$$

とみることできる。これは、位数 12 の部分群 $G_{12}(k)$ が対応する正 8 面体 $Oc(k)$ の変換群 ($\simeq \mathfrak{S}_4$) と $\mathcal{I} (\simeq \mathfrak{A}_5)$ との共通部分として得られることを示しており、4 交代群 \mathfrak{A}_4 に同型となっていることが直ちにわかる。

以上見てきたように \mathcal{I} には自明でない正規部分群は存在しない。すなわち、 $\mathcal{I} \simeq \mathfrak{A}_5$ は単純群である。

4 I の幾何学的表現と代数的表示

第2節では黄金比の定数 $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を用いて、正20面体の頂点を

$$V = \{(\pm 1, \pm \tau, 0), (0, \pm 1, \pm \tau), (\pm \tau, 0, \pm 1)\}$$

(複号任意) と定め、これをもとに $SO(3)$ の中に正20面体群を表現した。対称性を考慮して頂点の座標を定めたため、得られた回転の行列表示は非常に明解な形となった。

$\tau^2 = \tau + 1$ および $\tau^{-1} = \tau - 1$ なる関係が成立していることに注意すると、行列の成分として現れるのは $\mathbb{Z} \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \cdot \frac{\tau}{2}$ の形の数、特に $0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\tau}{2}, \pm \frac{\tau^{-1}}{2}$ のみである。したがって、

$$I \subset SO(3) \cap SL(3, \mathbb{Z} \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \cdot \frac{\tau}{2})$$

が得られる。

行列表示の特徴付けのため、 $\tilde{G} = SO(3) \cap SL(3, \mathbb{Z} \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \cdot \frac{\tau}{2})$ の構造について調べる。

4.1 \tilde{G} の決定

$(\mathbb{Z} \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \cdot \frac{\tau}{2})^3$ のベクトルについては次の命題が成立する。

命題 4.1. $\{s \in \mathbb{R}^3 \mid s \in (\mathbb{Z} \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \cdot \frac{\tau}{2})^3, |s| = 1\}$

$$= \{(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1),$$

$$\frac{1}{2}(\pm 1, \pm \tau^{-1}, \pm \tau), \frac{1}{2}(\pm \tau, \pm 1, \pm \tau^{-1}), \frac{1}{2}(\pm \tau^{-1}, \pm \tau, \pm 1),$$

$$\frac{1}{2}(\pm 1, \pm \tau, \pm \tau^{-1}), \frac{1}{2}(\pm \tau^{-1}, \pm 1, \pm \tau), \frac{1}{2}(\pm \tau, \pm \tau^{-1}, \pm 1)\}$$

(複号任意) となる。

証明 $s = \left(\frac{j_1}{2} + \frac{k_1}{2}\tau, \frac{j_2}{2} + \frac{k_2}{2}\tau, \frac{j_3}{2} + \frac{k_3}{2}\tau\right) \in (\mathbb{Z} \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \cdot \frac{\tau}{2})^3, j_n, k_n \in \mathbb{Z}$

($n = 1, 2, 3$) に対し、 $|s|^2 = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^3 (j_n^2 + k_n^2) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^3 (2j_n k_n + k_n^2) \tau$ より、

$$|s| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 4 & \cdots (1) \\ 2(j_1 k_1 + j_2 k_2 + j_3 k_3) + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0 & \cdots (2) \end{cases}$$

である。(1)より, $|j_n|, |k_n| \leq 2$ ($n = 1, 2, 3$)。一方, (2)から $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = -2(j_1k_1 + j_2k_2 + j_3k_3) \equiv 0 \pmod{2}$ であるから, $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0, 2$ または 4 となる。

$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 4$ とすると, (1)より $j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 = 0, j_1 = j_2 = j_3 = 0$ となるが, この場合 (2) は成立し得ない。

$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$ とすると, $k_1 = k_2 = k_3 = 0, j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 = 4$ となるが, $j_n \in \mathbb{Z}$ ($n = 1, 2, 3$) より $(j_1, j_2, j_3) \in \{(\pm 2, 0, 0), (0, \pm 2, 0), (0, 0, \pm 2)\}$ (複号任意) であり, これらは条件を満たす。この場合

$$s \in \{(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1)\}$$

(複号任意) となる。

$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 2$ とすると, (1)より, $j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 = 2$ で, $j_n, k_n \in \{0, \pm 1\}$ ($n = 1, 2, 3$) であり, j_n, k_n ともに 1 つの n に対してのみ 0 となっている。さらに (2) から, $2(j_1k_1 + j_2k_2 + j_3k_3) = -(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) = -2$ となり, $j_nk_n \in \{-1, 0\}$ ($n = 1, 2, 3$) であることがわかる。上の条件をすべて満たす組み合わせは, 以下の通りである。ただし, 複号は任意とする。

$$(j_1, k_1, j_2, k_2, j_3, k_3) \in \{(1, -1, \pm 1, 0, 0, \pm 1), (-1, 1, \pm 1, 0, 0, \pm 1), \\ (1, -1, 0, \pm 1, \pm 1, 0), (-1, 1, 0, \pm 1, \pm 1, 0), \\ (\pm 1, 0, 1, -1, 0, \pm 1), (\pm 1, 0, -1, 1, 0, \pm 1), \\ (0, \pm 1, 1, -1, \pm 1, 0), (0, \pm 1, -1, 1, \pm 1, 0), \\ (\pm 1, 0, 0, \pm 1, 1, -1), (\pm 1, 0, 0, \pm 1, -1, 1), \\ (0, \pm 1, \pm 1, 0, 1, -1), (0, \pm 1, \pm 1, 0, -1, 1)\}$$

$$\text{これは } j + k\tau = \begin{cases} \tau^{-1} & (j, k) = (-1, 1) \\ 1 & (j, k) = (1, 0) \\ \tau & (j, k) = (0, 1) \end{cases} \quad \text{に注意すると,}$$

$$s \in \left\{ \frac{1}{2}(\pm \tau^{-1}, \pm 1, \pm \tau), \frac{1}{2}(\pm \tau^{-1}, \pm \tau, \pm 1), \frac{1}{2}(\pm 1, \pm \tau^{-1}, \pm \tau), \right. \\ \left. \frac{1}{2}(\pm \tau, \pm \tau^{-1}, \pm 1), \frac{1}{2}(\pm 1, \pm \tau, \pm \tau^{-1}), \frac{1}{2}(\pm \tau, \pm 1, \pm \tau^{-1}) \right\}$$

(複号任意) と整理でき, 目的とする結果が得られる。

これらの $(\mathbb{Z} \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \cdot \frac{\tau}{2})^3$ の長さ 1 のベクトルの中から, 互いに直交するものを 3 つ並べれば $O(3)$ の行列が構成され, 1 つのベクトルの符号を調整すると行列式を 1 にすることができる。そのような互いに直交する 3 つのベクトルの組は, 符号を除くと以下のもので尽くされる。

$$\begin{aligned}
& \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \}, \\
& \{ \frac{1}{2}(1, \tau^{-1}, \tau), \frac{1}{2}(\tau^{-1}, \tau, -1), \frac{1}{2}(-\tau, 1, \tau^{-1}) \}, \\
& \{ \frac{1}{2}(1, \tau^{-1}, -\tau), \frac{1}{2}(\tau^{-1}, \tau, 1), \frac{1}{2}(\tau, -1, \tau^{-1}) \}, \\
& \{ \frac{1}{2}(1, -\tau^{-1}, \tau), \frac{1}{2}(-\tau^{-1}, \tau, 1), \frac{1}{2}(\tau, 1, -\tau^{-1}) \}, \\
& \{ \frac{1}{2}(-1, \tau^{-1}, \tau), \frac{1}{2}(\tau^{-1}, -\tau, 1), \frac{1}{2}(\tau, 1, \tau^{-1}) \}, \\
& \{ \frac{1}{2}(1, \tau, \tau^{-1}), \frac{1}{2}(-\tau, \tau^{-1}, 1), \frac{1}{2}(\tau^{-1}, -1, \tau) \}, \\
& \{ \frac{1}{2}(1, \tau, -\tau^{-1}), \frac{1}{2}(\tau, -\tau^{-1}, 1), \frac{1}{2}(-\tau^{-1}, 1, \tau) \}, \\
& \{ \frac{1}{2}(1, -\tau, \tau^{-1}), \frac{1}{2}(\tau, \tau^{-1}, -1), \frac{1}{2}(\tau^{-1}, 1, \tau) \}, \\
& \{ \frac{1}{2}(-1, \tau, \tau^{-1}), \frac{1}{2}(\tau, \tau^{-1}, 1), \frac{1}{2}(\tau^{-1}, 1, -\tau) \}
\end{aligned}$$

そこで, 以下の集合を考える。

$$\begin{aligned}
& G_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right. \\
& \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \\
& \quad \left. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\
& R_{16} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & \tau & -1 \\ -\tau & 1 & \tau^{-1} \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & 1 \\ \tau & -1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix}, \right. \\
& \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & \tau & 1 \\ \tau & -1 & \tau^{-1} \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & -1 \\ -\tau & 1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix}, \\
& \quad \left. \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & -\tau & -1 \\ \tau & 1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & \tau & 1 \\ -\tau & -1 & \tau^{-1} \end{pmatrix} \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & -\tau & 1 \\ \tau & 1 & \tau^{-1} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & \tau & -1 \\ -\tau & -1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix}, \\
 & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & -\tau & 1 \\ -\tau & -1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & \tau & -1 \\ \tau & 1 & \tau^{-1} \end{pmatrix}, \\
 & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & -\tau & -1 \\ -\tau & -1 & \tau^{-1} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & \tau & 1 \\ \tau & 1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix}, \\
 & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\tau^{-1} & \tau \\ \tau^{-1} & \tau & 1 \\ -\tau & 1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\tau^{-1} & \tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & -1 \\ \tau & -1 & \tau^{-1} \end{pmatrix}, \\
 & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ \tau^{-1} & \tau & -1 \\ \tau & -1 & -\tau^{-1} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\tau^{-1} & -\tau \\ -\tau^{-1} & -\tau & 1 \\ -\tau & 1 & \tau^{-1} \end{pmatrix} \Bigg\}, \\
 R_{48} = R_{16} \cup R_{16} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cup R_{16} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ここで, G_{12} は \mathfrak{A}_4 に同型な部分群で, R_{16} は 1 行目, 1 列目が $\frac{1}{2}(\pm 1, \pm \tau^{-1}, \pm \tau)$ となっている $SO(3)$ の行列からなる集合である。

以上をまとめると, 次の命題が得られる。

命題 4.2. \tilde{G} は以下のように分解される。

$$\begin{aligned}
 \tilde{G} = & G_{12} \cup G_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cup R_{48} \cup R_{48} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \cup \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_{48} \cup \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_{48} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

特に, $\#\tilde{G} = 216$ である。

4.2 \mathcal{I} の表示

前節の結果から

$$\mathcal{I} = G_{12} \cup R_{48}$$

なる結論が得られるが、これは \mathcal{I} が \tilde{G} の回転のうち、頂点の集合 V を保存する回転からなることを示している。

$$\mathcal{I} = \{g \in \tilde{G} \mid g(V) = V\}$$

また、 V を (z 軸回りに) $\pi/2$ 回転した点の集合

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (V) = \{\bar{v} \mid \bar{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} v, v \in V\} \\ &= \{(\pm 1, 0, \pm \tau), (0, \pm \tau, \pm 1), (\pm \tau, \pm 1, 0)\} \end{aligned}$$

(複号任意) も正 20 面体 \bar{Ic} の頂点を構成する。これに対応した

$$\bar{\mathcal{I}} = G_{12} \cup \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} R_{48} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は正 20 面体 \bar{Ic} の合同変換群となっており、

$$\bar{\mathcal{I}} = \{\bar{g} \in \tilde{G} \mid \bar{g}(\bar{V}) = \bar{V}\}$$

となる。これは頂点の選び方に依存した表示の違いに過ぎず、

$$\bar{\mathcal{I}} \simeq \mathcal{I}$$

である。

参考文献

- [1] 北川 正一, 正 8 面体の構造, 九州国際大学教養研究 第 16 巻 第 2 号 (2009 年 12 月)