正多面体群の $PSU(2)$ における構成 (I)

北 川 正 一

1 $SO(3)$ と $PSU(2)$

これまで回転群 $SO(3)$ の有限部分群として正多面体群の表示を求めてきた([1],[2]) が, 本論文では別の側面に注目することにする。

正多面体に外接する2次元球面 S^2 を考え, $SO(3)$ の変換を S^2 へ作用させ, その枠組みで正多面体群の変換も S^2 へ作用として捉える。S^2 は立体射影により $\hat{\mathbb{C}} \cong P^1(\mathbb{C})$ と同一視され, この対応により $SO(3)$ と $P^1(\mathbb{C})$ の同型群との対応を考えることができる。

ここでは $(x,y,z) \in S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2=r^2\}$ に対応する $\zeta = \xi + \eta\sqrt{-1} \in \mathbb{C}, (\xi, \eta \in \mathbb{R})$ の立体射影の表示として

$$\xi = \frac{rx}{r-z}, \quad \eta = \frac{ry}{r-z}$$

を採用する。ただし, $r>0$ とする。$[\zeta_0 : \zeta_1] \in P^1(\mathbb{C})$ に対して書き換えると

$$\zeta_0 = r(x+y\sqrt{-1}), \quad \zeta_1 = r - z$$

なる表示が得られる。立体射影により, S^2 上の対極の位置にある 2 点については $(x,y,z)\mapsto z$ のとき, $(-x,-y,-z)\mapsto -\dfrac{1}{\bar{z}}$ となることに注意する。

この対応により $SO(3)$ の回転と $SU(2)$ の変換を関係付けることができる。以下, しばらくは S^2 の半径 $r=1$ として計算をすすめる。まず, S^2 の 2 点 $(0,0,-1)$, $(0,0,1)$ を通る軸の回りの回転について考える。回転角を θ とすると対応する $SO(3)$ の回転は $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ となる。$\mathbb{C}$ での変換は $z\mapsto e^{\theta\sqrt{-1}}z$ と表され, $PSL(2,\mathbb{C})$ では, $R(\theta)=\begin{bmatrix} e^{\theta/2\sqrt{-1}} & 0\\ 0 & e^{-\theta/2\sqrt{-1}}\end{bmatrix}$ なる表示が得られる。次に一般の回転について, 表示を求める。S^2 の対極点は $\mathbb{C}$ では 2 点 z_0, $z_{0'}=-\dfrac{1}{\overline{z_0}}$ に対応する。そこで $\hat{\mathbb{C}}$ の一次変換で $0\mapsto z_0$, $\infty\mapsto z_{0'}$ なる対応を与えるものとして, $z\mapsto\zeta=\dfrac{z-z_0}{\overline{z_0}z+1}$ をとる。これは $PSL(2,\mathbb{C})$ では $T=\dfrac{1}{\sqrt{1+|z_0|^2}}\begin{bmatrix}1 & -z_0\\ \overline{z_0} & 1\end{bmatrix}$ と表示できる。これにより, 一般の回転変換 $S(\theta)$ は回転角を θ とすると, 以下の図式

$$\begin{array}{ccc} P^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{R(\theta)} & P^1(\mathbb{C})\\ T\downarrow & & \downarrow T\\ P^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow[S(\theta)]{} & P^1(\mathbb{C}) \end{array}$$

から, $S(\theta)=T^{-1}R(\theta)T$ と求められる。ただし, 行列の形での作用は縦ベクトルへの積として考えるので, 作用の合成は左からの積となることに注意する。行列表示を計算すると

$$S(\theta)=\frac{1}{1+|z_0|^2}\begin{bmatrix} e^{\theta/2\sqrt{-1}}(1+e^{-\theta\sqrt{-1}}|z_0|^2) & -z_0(e^{\theta/2\sqrt{-1}}-e^{-\theta/2\sqrt{-1}})\\ -\overline{z_0}(e^{\theta/2\sqrt{-1}}-e^{-\theta/2\sqrt{-1}}) & e^{-\theta/2\sqrt{-1}}(1+e^{\theta\sqrt{-1}}|z_0|^2)\end{bmatrix}$$

となる。

$$\overline{e^{\theta/2\sqrt{-1}}(1+e^{-\theta\sqrt{-1}}|z_0|^2)}=e^{-\theta/2\sqrt{-1}}(1+e^{\theta\sqrt{-1}}|z_0|^2),$$

$$\overline{-z_0(e^{\theta/2\sqrt{-1}}-e^{-\theta/2\sqrt{-1}})}=\overline{z_0}(e^{\theta/2\sqrt{-1}}-e^{-\theta/2\sqrt{-1}}),$$

$$\begin{vmatrix} e^{\theta/2\sqrt{-1}}(1+e^{-\theta\sqrt{-1}}|z_0|^2) & -z_0(e^{\theta/2\sqrt{-1}}-e^{-\theta/2\sqrt{-1}}) \\ -\overline{z_0}(e^{\theta/2\sqrt{-1}}-e^{-\theta/2\sqrt{-1}}) & e^{-\theta/2\sqrt{-1}}(1+e^{\theta\sqrt{-1}}|z_0|^2) \end{vmatrix}=(1+|z_0|^2)^2$$

であるので，この行列は特殊ユニタリ行列である。また，この表示行列のトレースは $2\cos\dfrac{\theta}{2}$ となっており，$0<\theta<2\pi$ のとき絶対値は 2 を越えない。以上をまとめておく。

命題 $SO(3)$ の回転から誘導される $P^1(\mathbb{C})$ の変換は，$SU(2)$ の行列の形で表現することができる。その表示の 1 つとして回転角を θ，固定点を $z_0\in\mathbb{C}$ とするとき

$$\frac{1}{1+|z_0|^2}\begin{bmatrix} e^{\theta/2\sqrt{-1}}(1+e^{-\theta\sqrt{-1}}|z_0|^2) & -z_0(e^{\theta/2\sqrt{-1}}-e^{-\theta/2\sqrt{-1}}) \\ -\overline{z_0}(e^{\theta/2\sqrt{-1}}-e^{-\theta/2\sqrt{-1}}) & e^{-\theta/2\sqrt{-1}}(1+e^{\theta\sqrt{-1}}|z_0|^2) \end{bmatrix}$$

が得られる。

$P^1(\mathbb{C})$ の同型として考える場合，行列の表示については射影化の自由度を考慮する必要がある。以下，[ ] の形で表記されている行列は射影化された状態で，$PSU(2)$ の中で考えているものとする。この表示式をもとに $SO(3)$ の部分群として捉えた正多面体群を $PSU(2)$ の中に表現していくことにする。

2 $PSU(2)$ における表示

2.1 正 4 面体群

正 4 面体の頂点として，$\mathbb{R}^3$ に 4 点 $A_+(1,1,1)$, $B_-(-1,1,-1)$, $C_+(-1,-1,1)$, $D_-(1,-1,-1)$ をとる。このとき正 4 面体群 $\mathcal{T}\subset SO(3)$ はこれらの点の置換群として捉えることができる。それは，

$$\mathcal{T}=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\right.$$

$$
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Bigg\}
$$

と表現できる ([1])。

この表示の $PSU(2)$ への対応を求めると以下のようになる。

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \end{bmatrix}
$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} & -1+\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} & -1-\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} & -1+\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} & -1-\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

これら $PSU(2)$ の変換を表す行列の固有値, 固有ベクトルについて, 固有値は位数に関係し, 固有ベクトルは固定点についての情報を与える。それらについては, 2.3 節で正 8 面体群の変換も含めて取り扱う。

2.2 正8面体群

正8面体群は正4面体群を部分群として含んでおり, 前節に続き表示を求めることにする。そのためには正8面体の代わりにその双対である正6面体 (立方体) を考えるのが都合が良い。

$A_+(1,1,1)$, $B_-(-1,1,-1)$, $C_+(-1,-1,1)$, $D_-(1,-1,-1)$ に加え $A_-(1,1,-1)$, $B_+(-1,1,1)$, $C_-(-1,-1,-1)$, $D_+(1,-1,1)$ を取り, 立方体の頂点とする。この立方体の各面の重心は双対となる正8面体の頂点を形成している。正6面体群はこれらの点の変換の群となっており, 正4面体群を部分群として含むことも容易にわかる。

$SO(3)$ における正8面体群 O の表示を位数, 半径 $r=1$ の S^2 上の固定点とともに明示する ([1])。

変換	行列	位数	固定点
$e:$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	1	
$x:$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$
$x^2:$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$
$x^{-1}:$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$
$y:$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

$$y^2: \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad 2 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y^{-1}: \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 4 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z: \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 4 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$z^2: \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 2 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$z^{-1}: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad 4 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$h_{z+}: \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad 2 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_{z-}: \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad 2 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$h_{x+}: \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$h_{x-}: \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h_{y+}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$h_{y-}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 2 \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 3 \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_1^{-1}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 3 \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_2: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 3 \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_2^{-1}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 3 \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_3: \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 3 \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_3^{-1}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 3 \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_4: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 3 \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$w_4^{-1}:\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\qquad 3\qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

左端の記号は [1] での表記に従う。前節の結果を用いると，この表示に対応する $PSU(2)$ の変換を表す行列は以下のように求められる。

$$e:\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\leftrightarrow\quad\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$x:\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad\leftrightarrow\quad\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-\sqrt{-1}\\-\sqrt{-1}&1\end{bmatrix}$$

$$x^2:\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\quad\leftrightarrow\quad\begin{bmatrix}0&\sqrt{-1}\\\sqrt{-1}&0\end{bmatrix}$$

$$x^{-1}:\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\quad\leftrightarrow\quad\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&\sqrt{-1}\\\sqrt{-1}&1\end{bmatrix}$$

$$y:\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}\quad\leftrightarrow\quad\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$$

$$y^2:\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\quad\leftrightarrow\quad\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$y^{-1}:\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\quad\leftrightarrow\quad\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$$

$$z: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$z^2: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$z^{-1}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$h_{z+}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1-\sqrt{-1} \\ -(1+\sqrt{-1}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$h_{z-}: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & -(1+\sqrt{-1}) \\ 1-\sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$h_{x+}: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -\sqrt{-1} & 1 \\ -1 & \sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$h_{x-}: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -\sqrt{-1} & -1 \\ 1 & \sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$h_{y+}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$h_{y-}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$w_1: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$w_1^{-1}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} & -1+\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$w_2: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} & -1-\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$w_2^{-1}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$w_3: \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} & -1+\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$w_3^{-1}: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$w_4: \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$w_4^{-1}: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} & -1-\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

射影化の自由度を除くと，行列の各成分はガウス整数 $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-1}\right]$ の中で閉じている。

2.3　正 8 面体群表示行列の固有値と固有ベクトル

前節で求めた $PSU(2)$ の (単位行列を除く) 表示に対し，固有値，固有ベクトルを提示しておく。固有ベクトルは，$P^1(\mathbb{C})$ における固定点の同次座標に対応している。

行　列	固有値	固有ベクトル
$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 1 \end{bmatrix}$	$e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
	$e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix}$	$\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
	$-\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 1 \end{bmatrix}$	$e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$	$e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$
	$e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} -\sqrt{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	$-\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$
	$\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} -\sqrt{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$	$e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix}\sqrt{-1}\\ 1\end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix}-\sqrt{-1}\\ 1\end{bmatrix}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1+\sqrt{-1} & 0\\ 0 & 1-\sqrt{-1}\end{bmatrix}$	$e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$
	$e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}\sqrt{-1} & 0\\ 0 & -\sqrt{-1}\end{bmatrix}$	$-\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$
	$\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1-\sqrt{-1} & 0\\ 0 & 1+\sqrt{-1}\end{bmatrix}$	$e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1-\sqrt{-1}\\ -1-\sqrt{-1} & 0\end{bmatrix}$	$\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix}1+\sqrt{-1}\\ \sqrt{2}\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\\ 1\end{bmatrix}$
	$-\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix}-1-\sqrt{-1}\\ \sqrt{2}\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}-e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\\ 1\end{bmatrix}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & -1-\sqrt{-1}\\ 1-\sqrt{-1} & 0\end{bmatrix}$	$\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix}1-\sqrt{-1}\\ \sqrt{2}\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\\ 1\end{bmatrix}$

	$-\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} -1+\sqrt{-1} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}} \\ 1 \end{bmatrix}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -\sqrt{-1} & 1 \\ -1 & \sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$-\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} (1+\sqrt{2})\sqrt{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$
	$\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} (1-\sqrt{2})\sqrt{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -\sqrt{-1} & -1 \\ 1 & \sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} (-1+\sqrt{2})\sqrt{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$
	$-\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} -(1+\sqrt{2})\sqrt{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$
$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$
	$-\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$
$\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$	$\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$
	$-\sqrt{-1}$	$\begin{bmatrix} -1-\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$
	$e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} -1-\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} & -1+\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$

$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} & -1-\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} -1-\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$
	$e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} -1+\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} -1+\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} & -1+\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} -1-\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \\ -1-\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$
	$e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} -1-\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{-1} & 1-\sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1+\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$
	$e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$
$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} & -1-\sqrt{-1} \\ 1-\sqrt{-1} & 1+\sqrt{-1} \end{bmatrix}$	$e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} -1+\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$
	$e^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}$	$\begin{bmatrix} 1-\sqrt{-1} \\ -1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$

$$e^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}} \qquad \begin{bmatrix} -1+\sqrt{-1} \\ 1+\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

3　行列表示の特徴付

1.1 節における $SO(3)$ と $PSU(2)$ の対応を与える写像を $p : SO(3) \to PSU(2)$ とする。

3.1　正 4 面体群の場合

前節までに求めた表示から, 以下のことが示される。

定理　正 8 面体群 T の $PSU(2)$ における像 $p(T)$ は以下のように表示することができる。

$$p(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \in PSU(2) \;\middle|\; \begin{array}{l} a = \dfrac{k+\ell\sqrt{-1}}{2},\ b = \dfrac{m+n\sqrt{-1}}{2} \\ k,\ell,m,n \in \mathbb{Z},\ k^2+\ell^2+m^2+n^2 = 4 \end{array} \right\}$$

証明　表示より

$$p(T) \subset \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \in PSU(2) \;\middle|\; \begin{array}{l} a = \dfrac{k+\ell\sqrt{-1}}{2},\ b = \dfrac{m+n\sqrt{-1}}{2} \\ k,\ell,m,n \in \mathbb{Z}, \\ k \equiv \ell \equiv m \equiv n \pmod 2 \end{array} \right\}$$

である。さらに $|a|^2+|b|^2=1$ より, $k,\ell,m,n \in \{0,\pm1,\pm2\}$ であり,

$$k^2+\ell^2+m^2+n^2 = 4$$

となる。また,

$$\#\left\{(k,\ell,m,n) \in \mathbb{Z}^4 \mid k^2+\ell^2+m^2+n^2 = 4\right\} = 24 = 2\#T$$

となっている。射影化の自由度を考慮すると,

$$\#\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \in PSU(2) \;\middle|\; \begin{array}{l} a = \dfrac{k+\ell\sqrt{-1}}{2},\ b = \dfrac{m+n\sqrt{-1}}{2} \\ k,\ell,m,n \in \mathbb{Z},\ k^2+\ell^2+m^2+n^2 = 4 \end{array} \right\}$$

$= 12 = \#\mathcal{T}$

より結論を得る。

3.2 正8面体群の場合

正8面体群 $\mathcal{O}$ については

$$p(\mathcal{O}) \subset p(\mathcal{T}) \cup \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \in PSU(2) \middle| \sqrt{2}a,\ \sqrt{2}b \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{-1}\right] \right\}$$

である。ここで,

$$a = \frac{k + \ell\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},\ b = \frac{m + n\sqrt{-1}}{\sqrt{2}} \quad (k, \ell, m, n \in \mathbb{Z})$$

とすると, $|a|^2 + |b|^2 = 1$ より,

$$k^2 + \ell^2 + m^2 + n^2 = 2$$

となる。

$$\#\left\{(k, \ell, m, n) \in \mathbb{Z}^4 \mid k^2 + \ell^2 + m^2 + n^2 = 2\right\} = 24$$

であるが, 射影化を考えると

$$\#\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \in PSU(2) \middle| \begin{array}{l} a = \dfrac{k + \ell\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},\ b = \dfrac{m + n\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \\ k, \ell, m, n \in \mathbb{Z},\ k^2 + \ell^2 + m^2 + n^2 = 2 \end{array} \right\} = 12$$

となる。一方これは,

$$\#(\mathcal{O} \setminus \mathcal{T}) = 24 - 12 = 12$$

に一致する。以上により次が得られた。

定理

$$p(\mathcal{O}) = p(\mathcal{T}) \cup \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \in PSU(2) \middle| \begin{array}{l} a = \dfrac{k + \ell\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \\ b = \dfrac{m + n\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \\ k, \ell, m, n \in \mathbb{Z}, \\ k^2 + \ell^2 + m^2 + n^2 = 2 \end{array} \right\}$$

変換の位数と行列の固有値については次が成立している。

命題　変換の位数を p とするとき, 表示行列として, 固有値が

$$e^{\pm\frac{\pi}{p}\sqrt{-1}}$$

となっているものを対応させることができる。

$\left(e^{\pm\frac{\pi}{p}\sqrt{-1}}\right)^p = -1$ であり, 表示行列を A とすると, $A^p = -E \neq E$(単位行列) であることに注意する。

3.3　正 20 面体群について

これまで取り上げた正 4 面体群, 正 8 面体群は本質的に $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-1}\right]$ における演算により制御されている。正多面体群にはもう 1 つ正 20 面体群があるが, これは $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-1}\right]$ の枠内には収まらない。そこには興味深い定数, 代数構造が現れるのであるが, それについてはこれに続く論文で取り上げたい。

参考文献

[1] 北川 正一, 正 8 面体の構造, 九州国際大学教養研究 第 16 巻 第 2 号 (2009 年 12 月)

[2] 北川 正一, 正 20 面体の構造, 九州国際大学教養研究 第 16 巻 第 3 号 (2010 年 3 月)