テータ函数の変換公式について

北川　正一

1　テータ函数

テータ函数は古典的な研究対象であり，多くの興味深い性質が知られている。本論文では，複素鏡映群の商空間の構成への応用を念頭に，テータ函数の有用な変換則を提示する。さらにリーマンのテータ関係式の 3 次の場合について証明と表示を与える。

以下の記号を用いる。

$\mathbb{Z}$: 整数環　$\mathbb{Q}$: 有理数体　$\mathbb{R}$: 実数体　$\mathbb{C}$: 複素数体

$z \in \mathbb{C}$ に対し，$\mathrm{Re}\, z$ で z の実部，$\mathrm{Im}\, z$ で z の虚部を表す。

$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$: 上半平面

$\exp(2\pi\sqrt{-1}\cdot) = \mathbf{e}(\cdot)$ と表記する。

1.1　テータ級数

$s,\ t \in \mathbb{Q}$ を固定し，

	$-x$	$x+1$	$x+\tau$
$\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\left(-\frac{\tau}{2}-x\right)\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$-\mathrm{e}\left(-\frac{\tau}{2}-x\right)\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$	$-\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\left(-\frac{\tau}{2}-x\right)\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$-\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$-\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$	$-\mathrm{e}\left(-\frac{\tau}{2}-x\right)\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

周期に関するモジュラー変換則は以下のようになる。

$$\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(\tau+1|x) = \vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(\tau|x)$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(\tau+1|x) = \vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(\tau|x)$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}(\tau+1|x) = \mathrm{e}\Big(\frac{1}{8}\Big)\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}(\tau|x)$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(\tau+1|x) = \mathrm{e}\Big(\frac{1}{8}\Big)\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(\tau|x)$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\Big(-\frac{1}{\tau}\Big|\frac{x}{\tau}\Big) = \tau^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}\Big(-\frac{1}{8}+\frac{x^2}{2\tau}\Big)\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(\tau|x)$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}\Big(-\frac{1}{\tau}\Big|\frac{x}{\tau}\Big) = \tau^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}\Big(-\frac{1}{8}+\frac{x^2}{2\tau}\Big)\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}(\tau|x)$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}\Big(-\frac{1}{\tau}\Big|\frac{x}{\tau}\Big) = \tau^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}\Big(-\frac{1}{8}+\frac{x^2}{2\tau}\Big)\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(\tau|x)$$

$$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}\Big(-\frac{1}{\tau}\Big|\frac{x}{\tau}\Big) = \tau^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}\Big(-\frac{3}{8}+\frac{x^2}{2\tau}\Big)\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(\tau|x)$$

2.2 $\ell=6,\ \tau=\mathrm{e}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ の場合

次に主に位数 3, 6 の鏡映変換に関係する $\ell=6,\ \tau=\mathrm{e}\left(\dfrac{1}{3}\right)$ なる場合について取り上げる。以下, $\mathrm{e}\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\omega$ と表記する。

$\left(\frac{1}{6}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)+\left(\frac{1}{6}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\right)\omega=\left\{\frac{j}{6}+\frac{k}{6}\omega\middle|j,k=0,1,\cdots,5\right\}$ の要素に対する平行移動に関する変換式は以下のようになる。

$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{a}{6}\\ \frac{b}{6}\end{bmatrix}\left(\omega\middle|x+\frac{j}{6}+\frac{k}{6}\omega\right)=\mathrm{e}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{6}\right)^2\omega-\frac{k}{6}\left(x+\frac{b+j}{6}\right)\right)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{a+k}{6}\\ \frac{b+j}{6}\end{bmatrix}(\omega|x)$$

指標に注意して表にまとめておく。

	$x+\frac{1}{6}$	$x+\frac{1}{6}\omega$
$\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\left(-\frac{1}{36}\left(\frac{1}{2}\omega+6x\right)\right)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\0\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{2}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\left(-\frac{1}{36}\left(\frac{1}{2}\omega+6x+1\right)\right)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{2}{6}\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{3}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\left(-\frac{1}{36}\left(\frac{1}{2}\omega+6x+2\right)\right)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{2}{6}\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{3}{6}\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{4}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\left(-\frac{1}{36}\left(\frac{1}{2}\omega+6x+3\right)\right)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{3}{6}\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{4}{6}\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\left(-\frac{1}{36}\left(\frac{1}{2}\omega+6x+4\right)\right)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{4}{6}\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\left(-\frac{1}{36}\left(\frac{1}{2}\omega+6x+5\right)\right)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}$

	$x+\frac{1}{6}$	$x+\frac{1}{6}\omega$
$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\0\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\big(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x)\big)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2}{6}\\0\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{2}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\big(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+1)\big)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2}{6}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{2}{6}\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{3}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\big(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+2)\big)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2}{6}\\\frac{2}{6}\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{3}{6}\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{4}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\big(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+3)\big)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2}{6}\\\frac{3}{6}\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{4}{6}\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\big(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+4)\big)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2}{6}\\\frac{4}{6}\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}$	$(1+\omega)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\0\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\big(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+5)\big)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2}{6}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}$

	$x+\frac{1}{6}$	$x+\frac{1}{6}\omega$
$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2}{6}\\0\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2}{6}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\big(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x)\big)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{3}{6}\\0\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2}{6}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2}{6}\\\frac{2}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\big(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+1)\big)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{3}{6}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2}{6}\\\frac{2}{6}\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2}{6}\\\frac{3}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\big(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+2)\big)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{3}{6}\\\frac{2}{6}\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2}{6}\\\frac{3}{6}\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2}{6}\\\frac{4}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\big(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+3)\big)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{3}{6}\\\frac{3}{6}\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2}{6}\\\frac{4}{6}\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2}{6}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\big(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+4)\big)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{3}{6}\\\frac{4}{6}\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2}{6}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}$	$\omega\vartheta\begin{bmatrix}\frac{2}{6}\\0\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\big(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+5)\big)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{3}{6}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}$

	$x+\frac{1}{6}$	$x+\frac{1}{6}\omega$
$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{3}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{3}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$	$\mathbf{e}(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x))\vartheta\begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{3}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{3}{6} \\ \frac{2}{6} \end{bmatrix}$	$\mathbf{e}(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+1))\vartheta\begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{3}{6} \\ \frac{2}{6} \end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{3}{6} \\ \frac{3}{6} \end{bmatrix}$	$\mathbf{e}(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+2))\vartheta\begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{2}{6} \end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{3}{6} \\ \frac{3}{6} \end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{3}{6} \\ \frac{4}{6} \end{bmatrix}$	$\mathbf{e}(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+3))\vartheta\begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{3}{6} \end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{3}{6} \\ \frac{4}{6} \end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{3}{6} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}$	$\mathbf{e}(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+4))\vartheta\begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{4}{6} \end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{3}{6} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}$	$-\vartheta\begin{bmatrix} \frac{3}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{e}(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+5))\vartheta\begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}$

	$x+\frac{1}{6}$	$x+\frac{1}{6}\omega$
$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$	$\mathbf{e}(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x))\vartheta\begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{2}{6} \end{bmatrix}$	$\mathbf{e}(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+1))\vartheta\begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{2}{6} \end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{3}{6} \end{bmatrix}$	$\mathbf{e}(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+2))\vartheta\begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{2}{6} \end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{3}{6} \end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{4}{6} \end{bmatrix}$	$\mathbf{e}(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+3))\vartheta\begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{3}{6} \end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{4}{6} \end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}$	$\mathbf{e}(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+4))\vartheta\begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{4}{6} \end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}$	$-(1+\omega)\vartheta\begin{bmatrix} \frac{4}{6} \\ 0 \end{bmatrix}$	$\mathbf{e}(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+5))\vartheta\begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}$

	$x+\frac{1}{6}$	$x+\frac{1}{6}\omega$
$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{5}{6}\\0\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{5}{6}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\big(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x)\big)\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{5}{6}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{5}{6}\\\frac{2}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\big(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+1)\big)\vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{5}{6}\\\frac{2}{6}\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{5}{6}\\\frac{3}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\big(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+2)\big)\vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{2}{6}\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{5}{6}\\\frac{3}{6}\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{5}{6}\\\frac{4}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\big(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+3)\big)\vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{3}{6}\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{5}{6}\\\frac{4}{6}\end{bmatrix}$	$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{5}{6}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\big(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+4)\big)\vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{4}{6}\end{bmatrix}$
$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{5}{6}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}$	$-\omega\vartheta\begin{bmatrix}\frac{5}{6}\\0\end{bmatrix}$	$\mathrm{e}\big(-\frac{1}{36}(\frac{1}{2}\omega+6x+5)\big)\vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}$

$x\mapsto -x$ については以下の式が成立する。

$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{a}{6}\\\frac{b}{6}\end{bmatrix}(\omega|-x)=\mathrm{e}\Big(\frac{a}{6}\Big)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{6-a}{6}\\\frac{6-b}{6}\end{bmatrix}(\omega|x)$$

周期についての変換式は $\omega+1=-\dfrac{1}{\omega}$ であるため，同じ形の式の変換式となる。

$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{a}{6}\\\frac{b}{6}\end{bmatrix}(1+\omega|x)=\mathrm{e}\Big(-\frac{1}{2}\frac{a}{6}(\frac{a}{6}+1)\Big)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{a}{6}\\\frac{a+b+3}{6}\end{bmatrix}(\omega|x)$$

$$\begin{aligned}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{a}{6}\\\frac{b}{6}\end{bmatrix}\Big(-\frac{1}{\omega}\Big|\frac{x}{\omega}\Big)&=\vartheta\begin{bmatrix}\frac{a}{6}\\\frac{b}{6}\end{bmatrix}(1+\omega|-(1+\omega)x)\\&=\mathrm{e}\Big(\frac{1}{24}+(\frac{a}{6}-1)\frac{b}{6}-\frac{1+\omega}{2}x^2\Big)\vartheta\begin{bmatrix}\frac{b}{6}\\\frac{6-a}{6}\end{bmatrix}(\omega|x)\end{aligned}$$

3　リーマンのテータ関係式

整数を成分とする $n\times n$ 行列の集合を $M(n,\mathbb{Z})$ で表す。I_n を n 次単位行列とし, $m>0$ について ${}^tAA=m^2I_n$ となる行列 $A\in M(n,\mathbb{Z})$ を考える。$\frac{1}{m}A$ は直交行列である。このとき,

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_n \end{pmatrix}=\frac{1}{m}A\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}=\frac{1}{m}A\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

に対し,

$$\sum_{i=1}^{n}u'_iv'_i=\sum_{i=1}^{n}u_iv_i \tag{$\star$}$$

が成立する。

この節では, τ については固定されるので, $\vartheta\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}(\tau|x)=\vartheta\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}(x)$ と表記することにする。

3.1　古典的テータ関係式

この節ではよく知られているリーマンのテータ関係式について確認する。

$m=2,\ n=4$ の場合に $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると,

${}^tAA=4I_4$ となる。これより $(\star)$ から

$$\begin{aligned}&(u_1+u_2+u_3+u_4)^2+(u_1+u_2-u_3-u_4)^2\\ &+(u_1-u_2+u_3-u_4)^2+(u_1-u_2-u_3+u_4)^2\\ &=4(u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2)\end{aligned}$$

が導かれる。この関係式を基に $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ とおいて，リーマンのテータ公式:

$$\begin{aligned}
&\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(x_1)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(x_2)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(x_3)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(x_4) \\
&+\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(x_1)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(x_2)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(x_3)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(x_4) \\
&+\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}(x_1)\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}(x_2)\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}(x_3)\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}(x_4) \\
&+\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(x_1)\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(x_2)\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(x_3)\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(x_4) \\
&=2\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(y_1)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(y_2)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(y_3)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(y_4)
\end{aligned}$$

を得ることができる。この形の公式には多くの類似型のものが存在する。

3.2　3 次のテータ関係式

この節では 3 次の場合 $(m = n = 3)$ について，いくつかの公式を導く。

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ とおくと，${}^tAA = 9I_3$ が成り立つ。$(\star)$ より 2 次の関係式

$$(-x + 2y + 2z)^2 + (2x - y + 2z)^2 + (2x + 2y - z)^2 = 9(x^2 + y^2 + z^2)$$

が得られる。

以降では簡単のため $\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(x)=\vartheta(x)$ と書く。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j,k=0,1,2} \mathbf{e}\Big(\frac{3}{2}(\frac{k}{3})^2\tau+\frac{k}{3}(x+y+z)-\frac{jk}{3}\Big) \\
&\qquad \vartheta\Big(x+\frac{j+k\tau}{3}\Big)\vartheta\Big(y+\frac{j+k\tau}{3}\Big)\vartheta\Big(z+\frac{j+k\tau}{3}\Big) \\
&=\sum_{j,k=0,1,2}\Bigg[\sum_{\ell,m,n\in\mathbb{Z}} \mathbf{e}\Big(\frac{1}{2}((\ell+\frac{k}{3})^2+(m+\frac{k}{3})^2+(n+\frac{k}{3})^2)\tau \\
&\qquad +(\ell+\frac{k}{3})x+(m+\frac{k}{3})y+(n+\frac{k}{3})z \\
&\qquad +\frac{j}{3}(\ell+m+n-k)\Big)\Bigg] \\
&=\sum_{k=0,1,2}\Bigg[\sum_{\ell,m,n\in\mathbb{Z}} \mathbf{e}\Big(\frac{1}{2}((\ell+\frac{k}{3})^2+(m+\frac{k}{3})^2+(n+\frac{k}{3})^2)\tau \\
&\qquad +(\ell+\frac{k}{3})x+(m+\frac{k}{3})y+(n+\frac{k}{3})z\Big) \\
&\qquad \Big(1+\mathbf{e}\Big(\frac{1}{3}(\ell+m+n-k)\Big)+\mathbf{e}\Big(\frac{2}{3}(\ell+m+n-k)\Big)\Big)\Bigg] \quad \cdots \quad (*)
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
&1+\mathbf{e}\Big(\frac{1}{3}(\ell+m+n-k)\Big)+\mathbf{e}\Big(\frac{2}{3}(\ell+m+n-k)\Big) \\
&=\begin{cases} 0 & (\ell+m+n-k\not\equiv 0 \pmod 3) \\ 3 & (\ell+m+n-k\equiv 0 \pmod 3) \end{cases}
\end{aligned}
$$

より,

$$
\begin{aligned}
(*)=3\sum_{k=0,1,2}\Bigg[\sum_{\substack{\ell,m,n\in\mathbb{Z} \\ \ell+m+n\equiv k \mod 3}} &\mathbf{e}\Big(\frac{1}{2}((\ell+\frac{k}{3})^2+(m+\frac{k}{3})^2+(n+\frac{k}{3})^2)\tau \\
&+(\ell+\frac{k}{3})x+(m+\frac{k}{3})y+(n+\frac{k}{3})z\Big)\Bigg]
\end{aligned}
$$

さらに,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3}A \begin{pmatrix} \ell + \frac{k}{3} \\ m + \frac{k}{3} \\ n + \frac{k}{3} \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left[2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 3I_3\right]\begin{pmatrix} \ell \\ m \\ n \end{pmatrix} + \frac{k}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{3}(\ell + m + n - k)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \ell \\ m \\ n \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より $k = 0, 1, 2$ に対し,

$$\ell, m, n \in \mathbb{Z}, \quad \ell + m + n \equiv k \pmod 3 \Longleftrightarrow a, b, c \in \mathbb{Z}$$

となり, $k = 0, 1, 2;\quad \ell, m, n \in \mathbb{Z},\quad \ell + m + n \equiv k \pmod 3$ にわたる和は $a, b, c \in \mathbb{Z}$ に関する和に置き換えることができる。したがって,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{3}A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と書くことにすると $(\star)$ より,

$$(\ell + \frac{k}{3})^2 + (m + \frac{k}{3})^2 + (n + \frac{k}{3})^2 = a^2 + b^2 + c^2$$
$$(\ell + \frac{k}{3})x + (m + \frac{k}{3})y + (n + \frac{k}{3})z = au + bv + cw$$

であり, 結局

$$(\star) = 3 \sum_{a,b,c \in \mathbb{Z}} \mathbf{e}\Big(\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)\tau + au + bv + cw\Big)$$
$$= 3\vartheta(u)\vartheta(v)\vartheta(w)$$

が得られる。以上から，平行移動の変換公式

$$\vartheta\Big(x+\frac{j+k\tau}{3}\Big)=\mathbf{e}\Big(-\frac{1}{2}\big(\frac{k}{3}\big)^2\tau-\frac{k}{3}\big(x+\frac{j}{3}\big)\Big)\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{k}{3}\\ \frac{j}{3}\end{bmatrix}(x)$$

を用いてまとめると，次の定理が得られた。

定理 (3次のテータ関係式)　以下のテータ関係式が成立する。

$$\sum_{j,k=0,1,2}\mathbf{e}\Big(\frac{1}{3}jk\Big)\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{k}{3}\\ \frac{j}{3}\end{bmatrix}(x)\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{k}{3}\\ \frac{j}{3}\end{bmatrix}(y)\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{k}{2}\\ \frac{j}{2}\end{bmatrix}(z)$$
$$=3\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Big(\frac{-x+2y+2z}{3}\Big)\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Big(\frac{2x-y+2z}{3}\Big)\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\Big(\frac{2x+2y-z}{3}\Big)$$

上の式は同じ指標を持つ函数の積の和の形のものであるが，異なる平行移動を組み合わせると別の型の公式を求めることができる。

テータ関係式の左辺の各項の変数に平行移動を施すと以下のようになる。

$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{k}{3}\\ \frac{j}{3}\end{bmatrix}\big(x+\frac{m+n\tau}{3}\big)\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{k}{3}\\ \frac{j}{3}\end{bmatrix}\big(y+\frac{p+q\tau}{3}\big)\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{k}{3}\\ \frac{j}{3}\end{bmatrix}\big(z+\frac{s+t\tau}{3}\big)$$
$$=\mathbf{e}\Big(-\frac{1}{2}\Big(\big(\frac{n}{3}\big)^2+\big(\frac{q}{3}\big)^2+\big(\frac{t}{3}\big)^2\Big)\tau-\frac{1}{3}\Big(n\big(x+\frac{m}{3}\big)+q\big(y+\frac{p}{3}\big)+t\big(z+\frac{s}{3}\big)\Big)\Big)$$
$$\mathbf{e}\Big(-\frac{1}{9}(n+q+t)j\Big)\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{k+n}{3}\\ \frac{j+m}{3}\end{bmatrix}(x)\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{k+q}{3}\\ \frac{j+p}{3}\end{bmatrix}(y)\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{k+t}{3}\\ \frac{j+s}{3}\end{bmatrix}(z)$$

これに対応するテータ関係式の右辺は，

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\frac{1}{3}A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}m'\\ p'\\ s'\end{pmatrix}=\frac{1}{3}A\begin{pmatrix}m\\ p\\ s\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}n'\\ q'\\ t'\end{pmatrix}=\frac{1}{3}A\begin{pmatrix}n\\ q\\ t\end{pmatrix}$$

と書くと,

$$\frac{1}{3}A\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}m\\p\\s\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}n\\q\\t\end{pmatrix}\right)\right)$$
$$=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}m'\\p'\\s'\end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix}n'\\q'\\t'\end{pmatrix}\right)$$

となるので,

$$\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(x'+\frac{m'+n'\tau}{3})\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(y'+\frac{p'+q'\tau}{3})\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(z'+\frac{s'+t'\tau}{3})$$
$$=\mathbf{e}\Big(-\frac{1}{2}\Big((\frac{n'}{3})^2+(\frac{q'}{3})^2+(\frac{t'}{3})^2\Big)\tau-\frac{1}{3}\big(n'(x'+\frac{m'}{3})+q'(y'+\frac{p'}{3})+t'(z'+\frac{s'}{3})\big)\Big)$$
$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{n'}{3}\\\frac{m'}{3}\end{bmatrix}(x')\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{q'}{3}\\\frac{p'}{3}\end{bmatrix}(y')\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{t'}{3}\\\frac{s'}{3}\end{bmatrix}(z') \qquad \cdots\ (**)$$

と求められる。ここで,

$$n^2+q^2+t^2=n'^2+q'^2+t'^2,$$
$$mn+pq+st=m'n'+p'q'+s't',$$
$$nx+qy+tz=n'x'+q'y'+t'z'$$

となることに注意すると,

$$\frac{1}{2}\Big((\frac{n}{3})^2+(\frac{q}{3})^2+(\frac{t}{3})^2\Big)\tau+\frac{1}{3}\big(n(x+\frac{m}{3})+q(y+\frac{p}{3})+t(z+\frac{s}{3})\big)$$
$$=\frac{1}{2}\Big((\frac{n'}{3})^2+(\frac{q'}{3})^2+(\frac{t'}{3})^2\Big)\tau+\frac{1}{3}\big(n'(x'+\frac{m'}{3})+q'(y'+\frac{p'}{3})+t'(z'+\frac{s'}{3})\big)$$

が成立する。また, テータ関係式の右辺の式 (**) が意味を持つためには,

$$m',n',p',q',s',t'\in\mathbb{Z}$$

であることが要請される ($\in \{0,1,2\}$ であればよい) が,

$$\begin{pmatrix} m' \\ p' \\ s' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}A\begin{pmatrix} m \\ p \\ s \end{pmatrix} = \frac{2}{3}(m+p+s)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m \\ p \\ s \end{pmatrix}$$

より,

$$m', p', s' \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow m+p+s \equiv 0 \pmod 3$$

であり, 同様に $n+q+t \equiv 0 \pmod 3$ の場合を考察すればよいことがわかる。以上から, 平行移動に関する変換則を適用すると, 先の定理は次の形に拡張される。

系 (拡張された 3 次のテータ関係式)

$m+p+s \equiv n+q+t \equiv 0 \pmod 3$ なる $m, n, p, q, s, t \in \mathbb{Z}$ に対し, 次のテータ関係式が成立する。

$$\sum_{j,k=0,1,2} \mathbf{e}\Big(\frac{1}{3}j\big(k - \frac{n+q+t}{3}\big)\Big)$$
$$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{k+n}{3} \\ \frac{j+m}{3} \end{bmatrix}(x)\ \vartheta\begin{bmatrix} \frac{k+q}{3} \\ \frac{j+p}{3} \end{bmatrix}(y)\ \vartheta\begin{bmatrix} \frac{k+t}{3} \\ \frac{j+s}{3} \end{bmatrix}(z)$$
$$=3\ \vartheta\begin{bmatrix} \frac{n'}{3} \\ \frac{m'}{3} \end{bmatrix}(x')\ \vartheta\begin{bmatrix} \frac{q'}{3} \\ \frac{p'}{3} \end{bmatrix}(y')\ \vartheta\begin{bmatrix} \frac{t'}{3} \\ \frac{s'}{3} \end{bmatrix}(z')$$

ここで, 変数については,

$$\begin{pmatrix} x' & m' & n' \\ y' & p' & q' \\ z' & s' & t' \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & m & n \\ y & p & q \\ z & s & t \end{pmatrix}$$

なる関係で結ばれている。

3.3　3次関係式の表示

前節で扱った3次関係式について，その具体的な表示を求める。この節では，

$$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{s}{3}\\ \frac{t}{3}\end{bmatrix}(\tau|x)=\vartheta\begin{bmatrix}s\\ t\end{bmatrix}(x),\quad \mathrm{e}(\tfrac{1}{3})=\omega,\ \mathrm{e}(-\tfrac{1}{3})=\varpi,$$

なる表記を使用し，

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&2&2\\ 2&-1&2\\ 2&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

とおく。

$\begin{pmatrix}m\\ p\\ s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}n\\ q\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ の場合

$$\begin{aligned}
&\vartheta\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}(z)+\varpi\vartheta\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}(z)\\
&+\omega\vartheta\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}(z)+\vartheta\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}(z)\\
&+\vartheta\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}(z)+\vartheta\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}(z)\\
&+\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}(z)+\omega\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}(z)\\
&+\varpi\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}(z)=3\,\vartheta\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}(x')\,\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}(y')\,\vartheta\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}(z')
\end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} m \\ p \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} n \\ q \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$の場合

$$\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(z) + \overline{\omega}\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\omega\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(z) + \vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(z) + \vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(z) + \omega\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\overline{\omega}\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(z) = 3\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(x')\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(y')\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(z')$$

$\begin{pmatrix} m \\ p \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} n \\ q \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$の場合

$$\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(z) + \omega\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\overline{\omega}\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(z) + \vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\overline{\omega}\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(z) + \omega\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(z) + \vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(z) = 3\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(x')\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(y')\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(z')$$

$$\begin{pmatrix} m \\ p \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n \\ q \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ の場合

$$\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(z) + \vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(z) + \vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\omega\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(z) + \overline{\omega}\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(z) + \overline{\omega}\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\omega\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(z) = 3\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(x')\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(y')\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(z')$$

$$\begin{pmatrix} m \\ p \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n \\ q \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ の場合

$$\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(z) + \vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(z) + \vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\omega\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(z) + \overline{\omega}\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(z) + \overline{\omega}\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\omega\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(z) = 3\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(x')\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(y')\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(z')$$

$\begin{pmatrix} m \\ p \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} n \\ q \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ の場合

$$\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(z)+\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(z)+\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\omega\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(z)+\overline{\omega}\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(z)+\overline{\omega}\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\omega\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(z)=3\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(x')\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(y')\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(z')$$

$\begin{pmatrix} m \\ p \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} n \\ q \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の場合

$$\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(z)+\overline{\omega}\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\omega\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(z)+\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(z)+\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(z)+\omega\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(z)$$

$$+\overline{\omega}\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(z)=3\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(x')\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(y')\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(z')$$

$$\begin{pmatrix} m \\ p \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n \\ q \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ の場合

$$\begin{aligned}
&\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(z) + \overline{\omega}\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(z) \\
&+\omega\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(z) + \vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(z) \\
&+\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(z) + \vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(z) \\
&+\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(z) + \omega\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(z) \\
&+\overline{\omega}\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(z) = 3\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(x')\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(y')\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(z')
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} m \\ p \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} n \\ q \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$ の場合

$$\begin{aligned}
&\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(z) + \omega\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}(z) \\
&+\overline{\omega}\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}(z) + \vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}(z) \\
&+\overline{\omega}\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(z) + \omega\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(z) \\
&+\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}(z) + \vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}(z) \\
&+\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(x)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(y)\,\vartheta\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}(z) = 3\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(x')\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(y')\,\vartheta\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}(z')
\end{aligned}$$

参考文献

[M] Mumford, D,. Tata Lectures on Theta I, Progress in Mathematics, Vol. 28, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1983

[U] 梅村 浩, 「楕円関数論」楕円曲線の解析学, 東京大学出版会, 2000