偶数次のリーマンのテータ関係式

北川　正一

1　リーマンのテータ関係式

1.1　記号

本論文で用いる記号をまとめておく。

$\mathbb{Z}$: 有理整数環　　$\mathbb{Q}$: 有理数体　　$\mathbb{R}$: 実数体　　$\mathbb{C}$: 複素数体

$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im} z > 0\}$: 上半平面

$m \in \mathbb{Z}, m > 0$ に対し, $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[0], [1], \cdots, [m-1]\}$

$M(n, \mathbb{Z})$: 整数係数 n 次正方行列の集合

$O(n)$: n 次直交行列の集合

I_n : n 次単位行列

1.2 テータ函数

テータ函数 ϑ は以下で定義される解析函数である ([U])。

$$\vartheta\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}(\tau|x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}\Big(\frac{1}{2}(n+s)^2\tau + (n+s)(x+t)\Big)$$

ここで, $\tau \in \mathbb{H}$, $x \in \mathbb{C}$, s, $t \in \mathbb{R}$ であり, $\mathrm{e}(\cdot) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\cdot)$ とする。

1.3 古典的テータ関係式

よく知られているリーマンのテータ関係式 (R) (の一つ) は次のように表される。

$y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$, $y_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$,

$y_3 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$, $y_4 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$

とするとき,

$$\begin{aligned}
&\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(\tau|x_1)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(\tau|x_2)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(\tau|x_3)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(\tau|x_4) \\
+&\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(\tau|x_1)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(\tau|x_2)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(\tau|x_3)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(\tau|x_4) \\
+&\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}(\tau|x_1)\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}(\tau|x_2)\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}(\tau|x_3)\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}(\tau|x_4) \\
+&\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(\tau|x_1)\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(\tau|x_2)\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(\tau|x_3)\,\vartheta\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(\tau|x_4) \\
=&2\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(\tau|y_1)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(\tau|y_2)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(\tau|y_3)\,\vartheta\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}(\tau|y_4) \quad \cdots\ (R)
\end{aligned}$$

が成立する。本論文では, この公式の拡張について取り扱う。

2 ある条件を満たす行列の性質

2.1 ${}^tAA = m^2I_n$ なる行列 A

[M] に従い, 次の条件を満たす行列 A について考察する。
成分が整数である n 次正方行列 $A \in M(n, \mathbb{Z})$ で, $m \in \mathbb{Z}, m > 0$ に対し,

${}^tAA = m^2I_n$

を満たすものを考える。$\dfrac{1}{m}A$ は直交行列である。

2.2 特定の形をした $2m$ 次の A

以降, 整数 $m \geq 2$ を固定し,

$$A = \begin{pmatrix} 1-m & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-m & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-m \end{pmatrix} \in M(2m, \mathbb{Z})$$

とおく。A は,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - mI_{2m}$$

と分解され, ${}^tAA = m^2I_{2m}$ が成り立つ。これより,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2m} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2m} \end{pmatrix}$$

とすると,

$$(y_1 \ \cdots \ y_{2m}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2m} \end{pmatrix} = m^2 (x_1 \cdots x_{2m}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2m} \end{pmatrix}$$

から,

$$\left((1-m)x_1+\cdots+x_{2m}\right)^2+\cdots+\left(x_1+\cdots+(1-m)x_{2m}\right)^2 = m^2\left(x_1^2+\cdots+x_{2m}^2\right)$$

なる 2 次の恒等式が得られる。

また,

$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\qquad \left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}:\text{固有値 } m \text{ の固有ベクトル}\right)$$

となっており,

$$\left(\frac{1}{m}A\right)^{-1}=\frac{1}{m}{}^tA=\frac{1}{m}A$$

より, $\frac{1}{m}A\in O(2m)$ である。よって,

$$\begin{pmatrix}u_1'\\ \vdots\\ u_{2m}'\end{pmatrix}=\frac{1}{m}A\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_{2m}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}v_1'\\ \vdots\\ v_{2m}'\end{pmatrix}=\frac{1}{m}A\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_{2m}\end{pmatrix}$$

に対し,

$$(u_1\ \cdots\ u_{2m})\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_{2m}\end{pmatrix}=(u_1'\ \cdots\ u_{2m}')\begin{pmatrix}v_1'\\ \vdots\\ v_{2m}'\end{pmatrix}.$$

となる ([K])。特に, $\sum_{i=1}^{2m}u_i^2=\sum_{i=1}^{2m}u_i'^2$ が成り立ち,

$$\frac{1}{m}A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

であるから, $\sum_{i=1}^{2m}u_i=\sum_{i=1}^{2m}u_i'$ となっている。

さらに $(\frac{1}{m}A)^2=I_{2m}$ より, $\frac{1}{m}A$ の固有値は, ±1 である。よって, A の固有値は $\pm m$ のいずれかである。

2.3 A によるパラメータ変換

次に，以下の写像について調べる。

$$\begin{array}{cccc} f_{\frac{1}{m}A}: & \mathbb{R}^{2m} & \to & \mathbb{R}^{2m} \\ & \Psi & & \Psi \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{m}Ax \end{array}$$

$f_{\frac{1}{m}A}$ は全単射であり，$f_{\frac{1}{m}A}^{-1} = f_{(\frac{1}{m}A)^{-1}} = f_{\frac{1}{m}A}$ となる。
$0 \le k < m$, $k \in \mathbb{Z}$ に対し，$S_k \subset \mathbb{Q}^{2m}$ を

$$S_k = \left\{ \left(\begin{array}{c} n_1 + \frac{k}{m} \\ \vdots \\ n_{2m} + \frac{k}{m} \end{array} \right) \middle| \begin{array}{l} n_i \in \mathbb{Z}\ (i = 1, \cdots, 2m) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2m} n_i + k \equiv 0 \pmod{m} \end{array} \right\}$$

と定義する。

$$n_i \in \mathbb{Z}\ (i = 1, \cdots, 2m), \quad \left(\begin{array}{c} n_1 + \frac{k}{m} \\ \vdots \\ n_{2m} + \frac{k}{m} \end{array} \right) \in S_k$$

のとき，

$$k \equiv k' \pmod{m} \iff \left(\begin{array}{c} n_1 + \frac{k'}{m} \\ \vdots \\ n_{2m} + \frac{k'}{m} \end{array} \right) \in S_k$$

であり，$k \not\equiv k' \pmod{m}$ ならば $S_k \cap S_{k'} = \emptyset$ となっている。従って S_k は $[k] \in \mathbb{Z}_m$ により決定され，$\displaystyle\bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k$ は直和である。

命題

$[k] \in \mathbb{Z}_m$ を完全代表系とするとき，定義域を $\displaystyle\bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k$ に制限すると，
$f_{\frac{1}{m}A}\Big|_{\bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k}$ は，$\displaystyle\bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k$ と $\mathbb{Z}^{2m}$ の間の1対1対応をあたえる。

証明

$f_{\frac{1}{m}A}$ は単射であるから, $f_{\frac{1}{m}A}\left(\bigcup_{[k]\in\mathbb{Z}_m} S_k\right)=\mathbb{Z}^{2m}$ を示せばよい。

$n_1,\cdots,n_{2m}\in\mathbb{Z}$ に対し,

$$
\begin{aligned}
f_{\frac{1}{m}A}\left(\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m} \end{pmatrix}\right) &= \frac{1}{m}A\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{m}\left[\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - mI_{2m}\right]\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m} \end{pmatrix} \\
&= -\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m} \end{pmatrix} + \frac{n_1+\cdots+n_{2m}}{m}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

より, $k\equiv n_1+\cdots+n_{2m}\pmod{m}$ なる k に対し,

$$
f_{\frac{1}{m}A}\left(\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m} \end{pmatrix}\right)\in S_k
$$

となっている。従って, $f_{\frac{1}{m}A}\left(\mathbb{Z}^{2m}\right)\subset\bigcup_{[k]\in\mathbb{Z}_m} S_k$ であるが, これより,

$$
f_{\frac{1}{m}A}\left(\bigcup_{[k]\in\mathbb{Z}_m} S_k\right)\supset f_{\frac{1}{m}A}\left(f_{\frac{1}{m}A}\left(\mathbb{Z}^{2m}\right)\right)=\mathbb{Z}^{2m}
$$

が得られる。

逆に, $k=0,1,\cdots,m-1$ に対して,

$$
f_{\frac{1}{m}A}\left(\begin{pmatrix} n_1+\frac{k}{m} \\ \vdots \\ n_{2m}+\frac{k}{m} \end{pmatrix}\right)
$$

$$= \frac{1}{m}A\left(\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m} \end{pmatrix} + \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{m}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - I_{2m}\right]\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m} \end{pmatrix} + \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{m}(n_1 + \cdots + n_{2m} + k)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m} \end{pmatrix}$$

より，$f_{\frac{1}{m}A}(S_k) \subset \mathbb{Z}^{2m}$ である。従って，

$$f_{\frac{1}{m}A}\left(\bigcup_{[k]\in\mathbb{Z}_m} S_k\right) \subset \mathbb{Z}^{2m}$$

が成立する。

以上から，

$$f_{\frac{1}{m}A}\left(\bigcup_{[k]\in\mathbb{Z}_m} S_k\right) = \mathbb{Z}^{2m}$$

となることが確認できた。すなわち，$f_{\frac{1}{m}A}\Big|_{\bigcup_{[k]\in\mathbb{Z}_m} S_k}$ により，$\bigcup_{[k]\in\mathbb{Z}_m} S_k$ と $\mathbb{Z}^{2m}$ は1対1に対応している。(証明終)

この $\frac{1}{m}A$ による対応は，総和を取る場合の変数変換に用いられる。

3　偶数次のテータ関係式の系列

以降では $\tau \in \mathbb{H}$ は固定されるので，

$$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{k}{m} \\ \frac{j}{m} \end{bmatrix}(\tau|z) = \vartheta\begin{bmatrix} \frac{k}{m} \\ \frac{j}{m} \end{bmatrix}(z)$$

と表記し，さらに簡単のため $\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(z)=\vartheta(z)$ と書くことにする。

3.1 ϑ の $2m$ 次式の和

まず，次のような ϑ の $2m$ 次式を計算すると，

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{2m}\vartheta\Big(z_i+\frac{j+k\tau}{m}\Big)\\
&=\sum_{n_1,\cdots,n_{2m}\in\mathbf{Z}}\mathrm{e}\Big(\frac{1}{2}(n_1+\frac{k}{m})^2\tau+\cdots+\frac{1}{2}(n_{2m}+\frac{k}{m})^2\tau\\
&\qquad\qquad+\big(n_1+\frac{k}{m}\big)z_1+\cdots+\big(n_{2m}+\frac{k}{m}\big)z_{2m}\\
&\qquad\qquad+\frac{j}{m}(n_1+\cdots+n_{2m})\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{2}(\frac{k}{m})^2 2m\tau-\frac{k}{m}(z_1+\cdots+z_{2m})\Big)\\
&=\mathrm{e}\Big(-\frac{k}{m}(k\tau+z_1+\cdots+z_{2m})\Big)\\
&\quad\sum_{n_1,\cdots,n_{2m}\in\mathbf{Z}}\mathrm{e}\Big(\frac{1}{2}(n_1+\frac{k}{m})^2\tau+\cdots+\frac{1}{2}(n_{2m}+\frac{k}{m})^2\tau\\
&\qquad\qquad+\big(n_1+\frac{k}{m}\big)z_1+\cdots+\big(n_{2m}+\frac{k}{m}\big)z_{2m}\\
&\qquad\qquad+\frac{j}{m}(n_1+\cdots+n_{2m})\Big)
\end{aligned}
$$

と求められる。この結果に注意して，

$$\eta(j,k)=\frac{k}{m}(j+k\tau+z_1+\cdots+z_{2m})$$

とおき，次の和を考える。

$$\sum_{j,k=0}^{m-1}\mathrm{e}(\eta(j,k))\prod_{i=1}^{2m}\vartheta\Big(z_i+\frac{j+k\tau}{m}\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j,k=0}^{m-1} \Bigg[\sum_{n_1,\cdots,n_{2m}\in\mathbb{Z}} \mathbf{e}\Big(\frac{1}{2}\big(n_1+\frac{k}{m}\big)^2\tau+\cdots+\frac{1}{2}\big(n_{2m}+\frac{k}{m}\big)^2\tau \\
&\qquad + \big(n_1+\frac{k}{m}\big)z_1+\cdots+\big(n_{2m}+\frac{k}{m}\big)z_{2m} \\
&\qquad + \frac{j}{m}(n_1+\cdots+n_{2m}+k)\Big)\Bigg] \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \Bigg[\sum_{n_1,\cdots,n_{2m}\in\mathbb{Z}} \mathbf{e}\Big(\frac{1}{2}\big(n_1+\frac{k}{m}\big)^2\tau+\cdots+\frac{1}{2}\big(n_{2m}+\frac{k}{m}\big)^2\tau \\
&\qquad + \big(n_1+\frac{k}{m}\big)z_1+\cdots+\big(n_{2m}+\frac{k}{m}\big)z_{2m}\Big) \\
&\qquad \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{e}\Big(\frac{j}{m}(n_1+\cdots+n_{2m}+k)\Big)\Bigg] \qquad \cdots \quad (*)
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{e}\big(\frac{j}{m}(n_1+\cdots+n_{2m}+k)\big) = \begin{cases} 0 & (n_1+\cdots+n_{2m}+k \not\equiv 0 \pmod{m}) \\ m & (n_1+\cdots+n_{2m}+k \equiv 0 \pmod{m}) \end{cases}
$$

であることから,

$$
\begin{aligned}
(*) &= m\sum_{k=0}^{m-1} \Bigg[\sum_{\substack{n_1,\cdots,n_{2m}\in\mathbb{Z} \\ \sum_{i=1}^{2m} n_i+k\equiv 0 \pmod{m}}} \mathbf{e}\Big(\frac{1}{2}\Big(\big(n_1+\frac{k}{m}\big)^2+\cdots+\big(n_{2m}+\frac{k}{m}\big)^2\Big)\tau \\
&\qquad + \big(n_1+\frac{k}{m}\big)z_1+\cdots+\big(n_{2m}+\frac{k}{m}\big)z_{2m}\Big)\Bigg] \\
&= m\sum_{k=0}^{m-1} \Bigg[\sum_{(n_i+\frac{k}{m})_{i=1}^{2m}\in S_k} \mathbf{e}\Big(\frac{1}{2}\Big(\big(n_1+\frac{k}{m}\big)^2+\cdots+\big(n_{2m}+\frac{k}{m}\big)^2\Big)\tau \\
&\qquad + \big(n_1+\frac{k}{m}\big)z_1+\cdots+\big(n_{2m}+\frac{k}{m}\big)z_{2m}\Big)\Bigg] \qquad \cdots \quad (**)
\end{aligned}
$$

となる。

$$
\begin{pmatrix} \widetilde{n_1} \\ \vdots \\ \widetilde{n_{2m}} \end{pmatrix} = \frac{1}{m}A \begin{pmatrix} n_1+\frac{k}{m} \\ \vdots \\ n_{2m}+\frac{k}{m} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \widetilde{z_1} \\ \vdots \\ \widetilde{z_{2m}} \end{pmatrix} = \frac{1}{m}A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{2m} \end{pmatrix}
$$

とおくと, k, n_i に関する和は絶対収束し, 前節の 命題 から,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{n_1} \\ \vdots \\ \widetilde{n_{2m}} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2m}$$

についての和に置き換えることができ,

$$(n_1+\frac{k}{m})^2+\cdots+(n_{2m}+\frac{k}{m})^2=\widetilde{n_1}^2+\cdots+\widetilde{n_{2m}}^2$$
$$(n_1+\frac{k}{m})z_1+\cdots+(n_{2m}+\frac{k}{m})z_{2m}=\widetilde{n_1}\widetilde{z_1}+\cdots+\widetilde{n_{2m}}\widetilde{z_{2m}}$$

が成立するので,

$$(**)=m\sum_{\widetilde{n_1},\cdots,\widetilde{n_{2m}}\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}\Big(\frac{1}{2}(\widetilde{n_1}^2+\cdots+\widetilde{n_{2m}}^2)\tau+\widetilde{n_1}\widetilde{z_1}+\cdots+\widetilde{n_{2m}}\widetilde{z_{2m}}\Big)$$
$$=m\vartheta(\widetilde{z_1})\cdots\vartheta(\widetilde{z_{2m}})$$

と整理することができる。

3.2 偶数次テータ関係式

前節の結果に平行移動の変換公式

$$\vartheta\Big(z+\frac{j+k\tau}{m}\Big)=\mathbf{e}\Big(-\frac{k}{m}(\frac{1}{2}\frac{k}{m}\tau+\frac{j}{m}+z)\Big)\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{k}{m}\\ \frac{j}{m}\end{bmatrix}(z)$$

を組み合わせると,

$$\mathbf{e}(\eta(j,k))\prod_{i=1}^{2m}\vartheta\Big(z_i+\frac{j+k\tau}{m}\Big)=\mathbf{e}\Big(-\frac{jk}{m}\Big)\ \prod_{i=1}^{2m}\vartheta\begin{bmatrix}\frac{k}{m}\\ \frac{j}{m}\end{bmatrix}(z_i)$$

となり, 次の結果が得られる。

定理1 (偶数次のテータ関係式)
$m \geq 2,\ m \in \mathbb{Z}$ に対し, 次のテータ関係式が成立する。

$$\sum_{j,k=0}^{m-1} \mathrm{e}\Big(-\frac{jk}{m}\Big) \prod_{i=1}^{2m} \vartheta \begin{bmatrix} \frac{k}{m} \\ \frac{j}{m} \end{bmatrix} (z_i) = m \prod_{i=1}^{2m} \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\widetilde{z_i})$$

ただし,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{z_1} \\ \widetilde{z_2} \\ \vdots \\ \widetilde{z_{2m}} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1-m & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-m & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{2m} \end{pmatrix}$$

である。

上式は $m=1$ に対しても記述できるが, それは自明な関係式となる。
この定理は任意の偶数に対し, それを次数とするテータ関係式の系列をあたえるものである。

3.3 古典的テータ関係式との関係

$m=2$ の場合, 定理1の関係式は,

$$\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z_1)\, \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z_2)\, \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z_3)\, \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (z_4)$$

$$+\vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (z_1)\, \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (z_2)\, \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (z_3)\, \vartheta \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (z_4)$$

$$+\vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} (z_1)\, \vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} (z_2)\, \vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} (z_3)\, \vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} (z_4)$$

$$-\vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (z_1)\, \vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (z_2)\, \vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (z_3)\, \vartheta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} (z_4)$$

$$=2\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\frac{-z_1+z_2+z_3+z_4}{2})\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\frac{z_1-z_2+z_3+z_4}{2})$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\frac{z_1+z_2-z_3+z_4}{2})\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\frac{z_1+z_2+z_3-z_4}{2})$$

となるが, $z_1=-x_1,\ z_2=x_2,\ z_3=x_3,\ z_4=x_4\ \cdots$ (†) とおくと,

$$\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(-x_1)\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(x_2)\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(x_3)\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(x_4)$$

$$+\vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}(-x_1)\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}(x_2)\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}(x_3)\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}(x_4)$$

$$+\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}(-x_1)\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}(x_2)\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}(x_3)\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}(x_4)$$

$$-\vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}(-x_1)\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}(x_2)\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}(x_3)\ \vartheta\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}(x_4)$$

$$=2\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{2})\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\frac{-x_1-x_2+x_3+x_4}{2})$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\frac{-x_1+x_2-x_3+x_4}{2})\ \vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(\frac{-x_1+x_2+x_3-x_4}{2})$$

と書き直される。$\vartheta\begin{bmatrix}\frac{j}{2}\\\frac{k}{2}\end{bmatrix}$ は $j=k=1$ のときのみ奇函数で, その他は偶函数であるので, この関係式は古典的リーマンのテータ関係式 (R) に一致する。従って, 定理 1 は古典的テータ関係式の一つの拡張となっている。

対応する行列 A は次のものである。

$$(R):A_R=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\quad \text{定理 1}:A_4=\begin{pmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{pmatrix}$$

これらは特定のブロック部の符号を反転したものとなっているが，これは変数の符号の変換 (†) に対応している。すなわち，(†) の変換をあたえる行列

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を用いて，

$$A_R = -T^{-1} A_4 T$$

なる関係が成立している。

4　指標の変換と拡張されたテータ関係式

4.1　係数部分の表示

定理 1 のテータ関係式の左辺の各変数に $z_i + \dfrac{p_i + q_i\tau}{m}$,　$(p_i,\ q_i \in \mathbb{Z},\ i = 1,\cdots,2m)$ を代入し，平行移動の変換式

$$\vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{k}{m} \\ \dfrac{j}{m} \end{bmatrix}\Big(z_i + \frac{p_i + q_i\tau}{m}\Big) = \mathbf{e}\Big(-\frac{q_i}{m}\big(\frac{1}{2}\frac{q_i}{m}\tau + \frac{j+p_i}{m} + z_i\big)\Big)\,\vartheta\begin{bmatrix} \dfrac{k+q_i}{m} \\ \dfrac{j+p_i}{m} \end{bmatrix}(z_i)$$

を用いると，左辺の係数に現れる指数部分は，

$$\begin{aligned} &-\frac{kj}{m} - \sum_{i=1}^{2m}\Big(\frac{q_i}{m}\big(\frac{1}{2}\frac{q_i}{m}\tau + \frac{j+p_i}{m} + z_i\big)\Big) \\ &= -\sum_{i=1}^{2m}\Big(\frac{q_i}{m}\big(\frac{1}{2}\frac{q_i}{m}\tau + \frac{p_i}{m} + z_i\big)\Big) - \frac{j}{m}\Big(k + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{2m} q_i\Big) \end{aligned}$$

となる。

一方,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{p_1} & \widetilde{q_1} & \widetilde{z_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{p_{2m}} & \widetilde{q_{2m}} & \widetilde{z_{2m}} \end{pmatrix} = \frac{1}{m}A \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{2m} & q_{2m} & z_{2m} \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\frac{1}{m}A \begin{pmatrix} z_1 + \dfrac{p_1 + q_1\tau}{m} \\ \vdots \\ z_{2m} + \dfrac{p_{2m} + q_{2m}\tau}{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{z_1} + \dfrac{\widetilde{p_1} + \widetilde{q_1}\tau}{m} \\ \vdots \\ \widetilde{z_{2m}} + \dfrac{\widetilde{p_{2m}} + \widetilde{q_{2m}}\tau}{m} \end{pmatrix}$$

であるから, 右辺の係数部分は以下のようになる。

$$-\sum_{i=1}^{2m}\Big(\frac{\widetilde{q_i}}{m}\big(\frac{1}{2}\frac{\widetilde{q_i}}{m}\tau + \frac{\widetilde{p_i}}{m} + \widetilde{z_i}\big)\Big)$$

4.2 拡張されたテータ関係式

$\frac{1}{m}A \in O(2m)$ より,

$$\sum_{i=1}^{2m} {q_i}^2 = \sum_{i=1}^{2m} \widetilde{q_i}^2, \quad \sum_{i=1}^{2m} p_i q_i = \sum_{i=1}^{2m} \widetilde{p_i}\widetilde{q_i}, \quad \sum_{i=1}^{2m} q_i z_i = \sum_{i=1}^{2m} \widetilde{q_i}\widetilde{z_i}$$

であるから, 定理 1 の関係式の両辺の係数部分について,

$$\sum_{i=1}^{2m}\Big(\frac{q_i}{m}\big(\frac{1}{2}\frac{q_i}{m}\tau + \frac{p_i}{m} + z_i\big)\Big) = \sum_{i=1}^{2m}\Big(\frac{\widetilde{q_i}}{m}\big(\frac{1}{2}\frac{\widetilde{q_i}}{m}\tau + \frac{\widetilde{p_i}}{m} + \widetilde{z_i}\big)\Big)$$

が成立する。ただし,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{p_1} \\ \vdots \\ \widetilde{p_{2m}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widetilde{q_1} \\ \vdots \\ \widetilde{q_{2m}} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2m}$$

でなければならないことに注意する。第 2 節で調べた $f_{\frac{1}{m}A}$ の性質から, ある k に対し,

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{2m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{2m} \end{pmatrix} \in S_k \cap \mathbb{Z}^{2m}$$

となるが, $k \neq 0$ の場合は $S_k \cap \mathbb{Z}^{2m} = \emptyset$ であるから,

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{2m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{2m} \end{pmatrix} \in S_0$$

すなわち, $\displaystyle\sum_{i=1}^{2m} p_i \equiv \sum_{i=1}^{2m} q_i \equiv 0 \pmod{m}$ となる必要がある。

以上から, 係数を比較し整理すると次の形のテータ関係式を得る。

定理 2 (拡張されたテータ関係式)

$m \geq 2,\ m \in \mathbb{Z}$ とし,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{p_1} & \widetilde{q_1} & \widetilde{z_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{p_{2m}} & \widetilde{q_{2m}} & \widetilde{z_{2m}} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1-m & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{2m} & q_{2m} & z_{2m} \end{pmatrix}$$

とおくと, 次のテータ関係式が成立する。

$$\sum_{j,k=0}^{m-1} \mathbf{e}\Big(-\frac{j}{m}\big(k+\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{2m} q_i\big)\Big) \prod_{i=1}^{2m} \vartheta \begin{bmatrix} \dfrac{k+q_i}{m} \\ \dfrac{j+p_i}{m} \end{bmatrix} (z_i) = m \prod_{i=1}^{2m} \vartheta \begin{bmatrix} \dfrac{\widetilde{q_i}}{m} \\ \dfrac{\widetilde{p_i}}{m} \end{bmatrix} (\widetilde{z_i})$$

ただし, $p_i, q_i \in \mathbb{Z},\ (i = 1, \cdots, 2m)$ は,

$$\sum_{i=1}^{2m} p_i \equiv \sum_{i=1}^{2m} q_i \equiv 0 \pmod{m}$$

を満たすものとする。

この関係式は, 特殊な場合 ($m = 2$) として古典的なリーマンのテータ関係式を含むものである。各項は周期の $\frac{1}{m}$ 刻みの指標を持つ θ についての $2m$ 次式となっており, 高次 (偶数次) のテータ関係式となっている。

参考文献

[M] Mumford, D,. Tata Lectures on Theta I, Progress in Mathematics, Vol. 28, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1983

[U] 梅村 浩, 「楕円関数論」楕円曲線の解析学, 東京大学出版会, 2000

[K] 北川 正一, 「テータ函数の変換公式について」, 九州国際大学教養研究 第18巻 第1号 (2011年7月)