

高次のリーマンのテータ関係式

北 川 正 一

1 テータ函数

はじめに本論文で用いる記号とテータ函数の定義をあたえる。

1.1 定義

記号は以下を用いる。([K2])

\mathbb{Z} : 有理整数環 \mathbb{Q} : 有理数体 \mathbb{R} : 実数体 \mathbb{C} : 複素数体

$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z > 0\}$: 上半平面

$n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ とする。

I_n : n 次単位行列

O_n : n 次 (正方) 零行列

$M(n, \mathbb{Z})$: 整数係数の n 次正方行列

$O(n)$: n 次直交行列

(a, b) : $a, b \in \mathbb{Z}$ の最大公約数

以下, $e(\cdot) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\cdot)$ と表記する. $\tau \in \mathbb{H}$, $z \in \mathbb{C}$, $s, t \in \mathbb{R}$ に対し, 次の級数で定義される解析関数 ϑ を (s, t を指標とする) テータ関数という.

$$\vartheta \left[\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix} \right] (\tau|z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e \left(\frac{1}{2}(n+s)^2\tau + (n+s)(z+t) \right)$$

これは z に関する整関数である. 以降では, $\tau \in \mathbb{H}$ は固定されるので,

$$\vartheta \left[\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix} \right] (\tau|z) = \vartheta \left[\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix} \right] (z) \text{ と書くことにする.}$$

また, $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ に対し $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{[0], [1], \dots, [m-1]\}$ と書く.

1.2 リーマンのテータ関係式

[K2] では, リーマンのテータ関係式の偶数次への拡張を行い, 次の関係式を証明した.

定理 1-1 (偶数次のテータ関係式)

$m \geq 2$, $m \in \mathbb{Z}$ とし,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{p_1} & \widetilde{q_1} & \widetilde{z_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{p_{2m}} & \widetilde{q_{2m}} & \widetilde{z_{2m}} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} 1-m & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{2m} & q_{2m} & z_{2m} \end{pmatrix}$$

とすると, 次のテータ関係式が成立する.

$$\sum_{j,k=0}^{m-1} e \left(-\frac{j}{m} \left(k + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{2m} q_i \right) \right) \prod_{i=1}^{2m} \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \frac{k+q_i}{m} \\ \frac{j+p_i}{m} \end{smallmatrix} \right] (z_i) = m \prod_{i=1}^{2m} \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \frac{\widetilde{q_i}}{m} \\ \frac{\widetilde{p_i}}{m} \end{smallmatrix} \right] (\widetilde{z_i})$$

ただし, $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$, ($i = 1, \dots, 2m$) は,

$$\sum_{i=1}^{2m} p_i \equiv \sum_{i=1}^{2m} q_i \equiv 0 \pmod{m}$$

を満たすものとする.

本論文では、これを奇数次へも拡張した高次の関係式を扱い、以下の定理を証明する。

定理 1-2 (拡張されたテータ関係式)

$s = 1$ または 2 とし、 m は 2 以上の整数とする。また、 $s = 2$ の場合は m は奇数であるとする。

このとき、

$$\sum_{i=1}^{2m/s} p_i \equiv \sum_{i=1}^{2m/s} q_i \equiv 0 \pmod{m}$$

なる $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$ に対し、

$$\begin{pmatrix} \widetilde{p_1} & \widetilde{q_1} & \widetilde{z_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{p_{2m/s}} & \widetilde{q_{2m/s}} & \widetilde{z_{2m/s}} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} s-m & \cdots & s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s & \cdots & s-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{2m/s} & q_{2m/s} & z_{2m/s} \end{pmatrix}$$

とするとき、次の関係式が成立する。

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k=0}^{m-1} e\left(-\frac{j}{m}\left(\frac{m+1}{s}k + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{2m/s} q_i\right)\right) \prod_{i=1}^{2m/s} \vartheta\left[\frac{k+q_i}{\frac{m}{j+p_i}}\right](z_i) \\ &= m \prod_{i=1}^{2m/s} \vartheta\left[\frac{\widetilde{q_i}}{\frac{m}{\widetilde{p_i}}}\right](\widetilde{z_i}) \end{aligned}$$

定理 1-2 は、 $s = 1$ の場合として 定理 1-1 の結果を含んでいる。

2 ${}^tAA = m^2I_n$ なる行列 A

[M]にあるように, $m \in \mathbb{Z}, m > 0$ に対し, 整数係数の n 次正方行列 A で,

$${}^tAA = m^2I_n$$

となるものを考える。

2.1 $A = sN - mI_n$ なる形の行列

もっとも簡単な場合としては $A = \pm mI_n$ が考えられる。そこで $-mI_n$ との差に注目し, 成分がすべて 1 である行列を

$$N = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{Z})$$

と書き, $s \in \mathbb{Z}$ に対し, $A = sN - mI_n$, ($s \neq 0$) なる形のもの考える。本質的には, 直交行列 $\frac{1}{m}A$ が考察の対象となるので, 各成分の最大公約数が 1 であるような場合を調べれば十分である。したがって, 以降 s と m の最大公約数 $(s, m) = 1$ と仮定する。

N については,

$$N \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad {}^tNN = N^2 = nN$$

となっていることに注意する。

$$\begin{aligned} {}^tAA &= (s{}^tN - mI_n)(sN - mI_n) \\ &= s^2N^2 - 2smN + m^2I_n \\ &= s(sn - 2m)N + m^2I_n \end{aligned}$$

より, ${}^tAA = m^2 I_n$ が成り立つためには, $s(sn - 2m)N = O_n$ でなければならない。 $s \neq 0$ より, $sn - 2m = 0$ となるが, これが成立するのは

$$(I) \quad s = 1, \quad n = 2m$$

$$(II) \quad s = 2, \quad n = m$$

$$(III) \quad s = m, \quad n = 2$$

のいずれかの場合である。(III) の場合はテータ関係式は自明なものとなってしまうので, $m \geq 2$ とし, (I), (II) の場合について取り扱う。

2.2 (I) $s = 1, n = 2m$ の場合

この場合,

$$\begin{aligned} A &= N - mI_{2m} \\ &= \begin{pmatrix} 1-m & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1-m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるが, これは [K2] で取り上げた場合である。行列 A の次数は $2m$ であり偶数となっている。

2.3 (II) $s = 2, n = m$ の場合

この場合,

$$\begin{aligned} A &= 2N - mI_m \\ &= \begin{pmatrix} 2-m & \cdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & \cdots & 2-m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。 $(2, m) = 1$ より, $m \equiv 1 \pmod{2}$, すなわち, 行列 A の次数 m は奇数である。 $m = 3$ の場合を [K1] で扱っている。

2.4 行列 A の性質

(I) $s = 1$, (II) $s = 2$ いずれの場合でも, A は以下の性質を持つことが確かめられる ([K2])。

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{固有値 } m \text{ の固有ベクトル})$$

$$\frac{1}{m} A \in O(2m/s) \text{ であり,}$$

$$\begin{pmatrix} u'_1 \\ \vdots \\ u'_{2m/s} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{2m/s} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_{2m/s} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} A \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{2m/s} \end{pmatrix}$$

に対し,

$$(u_1, \dots, u_{2m/s}) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{2m/s} \end{pmatrix} = (u'_1, \dots, u'_{2m/s}) \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_{2m/s} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{2m/s} u_i = \sum_{i=1}^{2m/s} u'_i$$

が成立する。

2.5 パラメータ変換

[K2] と同様に線型写像

$$\begin{array}{ccc} f_{\frac{1}{m}A} : \mathbb{R}^{2m/s} & \rightarrow & \mathbb{R}^{2m/s} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \mathbf{x} & \mapsto & \frac{1}{m} A \mathbf{x} \end{array}$$

について調べる。本節では (I) $s = 1$, (II) $s = 2$ の場合を統一的に扱えるような形式で記述する。

$f_{\frac{1}{m}A}$ は全単射であり, $f_{\frac{1}{m}A}^{-1} = f_{(\frac{1}{m}A)^{-1}} = f_{\frac{1}{m}A}$ である。

$0 \leq k < m$, $k \in \mathbb{Z}$ に対し, $S_k \subset \mathbb{Q}^{2m/s}$ を

$$S_k = \left\{ \left(\begin{pmatrix} n_1 + \frac{k}{m} \\ \vdots \\ n_{2m/s} + \frac{k}{m} \end{pmatrix} \right) \middle| \begin{array}{l} n_i \in \mathbb{Z} \ (i = 1, \dots, 2m/s) \\ \sum_{i=1}^{2m/s} n_i - \frac{m-1}{s} k \equiv 0 \pmod{m} \end{array} \right\}$$

と定義する。 $s = 2$ のとき, $m \equiv 1 \pmod{2}$ より, $\frac{m-1}{s} \in \mathbb{Z}$ である。

$$n_i \in \mathbb{Z} \ (i = 1, \dots, 2m/s), \quad \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m/s} \end{pmatrix} + \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in S_k$$

のとき,

$$k \equiv k' \pmod{m} \iff \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m/s} \end{pmatrix} + \frac{k'}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in S_k$$

であり, S_k は $[k] \in \mathbb{Z}_m$ により決定される。

まず, $f_{\frac{1}{m}A}(Z^{2m/s})$ の像について調べる。

$$\begin{aligned} f_{\frac{1}{m}A} \left(\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m/s} \end{pmatrix} \right) &= \frac{1}{m} A \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m/s} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{m} (sN - mI_{2m/s}) \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m/s} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -n_1 \\ \vdots \\ -n_{2m/s} \end{pmatrix} + \frac{s \sum_{i=1}^{2m/s} n_i}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから, $n_i \in \mathbb{Z}$ ($i = 1, \dots, 2m/s$) に対し,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2m/s} (-n_i) - \frac{m-1}{s} \left(s \sum_{i=1}^{2m/s} n_i \right) &= - \sum_{i=1}^{2m/s} n_i - (m-1) \sum_{i=1}^{2m/s} n_i \\ &= -m \sum_{i=1}^{2m/s} n_i \\ &\equiv 0 \pmod{m} \end{aligned}$$

となる。よって, $s \sum_{i=1}^{2m/s} n_i \equiv k \pmod{m}$ なる k に対し,

$$f_{\frac{1}{m}A} \left(\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m/s} \end{pmatrix} \right) \in S_k$$

となっている。これより, $[k] \in \mathbb{Z}_m$ を完全代表系とすると,

$$f_{\frac{1}{m}A} \left(\mathbb{Z}^{2m/s} \right) \subset \bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k$$

従って,

$$f_{\frac{1}{m}A} \left(\bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k \right) \supset f_{\frac{1}{m}A} \left(f_{\frac{1}{m}A} \left(\mathbb{Z}^{2m/s} \right) \right) = \mathbb{Z}^{2m/s}$$

が成立する。ここで, $k \not\equiv k' \pmod{m}$ のとき, $S_k \cap S_{k'} = \emptyset$ であるから,

$\bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k$ は直和であることに注意する。
逆に

$$\begin{aligned} &f_{\frac{1}{m}A} \left(\begin{pmatrix} n_1 + \frac{k}{m} \\ \vdots \\ n_{2m/s} + \frac{k}{m} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{m} A \left(\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m/s} \end{pmatrix} + \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{s}{m} N - I_{2m/s} \right) \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m/s} \end{pmatrix} + \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{m} \left(s \sum_{i=1}^{2m/s} n_i - (m-1-m)k \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m/s} \end{pmatrix} \\
&= \frac{s}{m} \left(\sum_{i=1}^{2m/s} n_i - \frac{m-1}{s} k \right) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k - n_1 \\ \vdots \\ k - n_{2m/s} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より,

$$f_{\frac{1}{m}A}(S_k) \subset \mathbb{Z}^{2m/s} \quad (k = 0, \dots, m-1)$$

である。以上から,

$$f_{\frac{1}{m}A} \left(\bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k \right) = \mathbb{Z}^{2m/s}$$

となることが確認できた。すなわち,

$$f_{\frac{1}{m}A} \Big|_{\bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k} : \bigcup_{[k] \in \mathbb{Z}_m} S_k \longrightarrow \mathbb{Z}^{2m/s}$$

は全単射となっている。この関係は総和を求めるときに変数の変換として利用される。

3 高次テータ関係式

$m \geq 2$, $m \in \mathbb{Z}$, $s = 1$ または 2 とする。 $(s, m) = 1$ とすると $s = 2$ のときは $m \equiv 1 \pmod{2}$ である。以下, この条件が成り立っているものとする。

3.1 ϑ の n 次式の和

次の ϑ の $2m/s$ 次の積を計算する。

$$\begin{aligned}
 & \prod_{i=1}^{2m/s} \vartheta\left(z_i + \frac{j+k\tau}{m}\right) \\
 &= \sum_{n_1, \dots, n_{2m/s} \in \mathbb{Z}} e\left(\sum_{i=1}^{2m/s} \left[\frac{1}{2}n_i^2\tau + n_i\left(z_i + \frac{j+k\tau}{m}\right)\right]\right) \\
 &= \sum_{n_1, \dots, n_{2m/s} \in \mathbb{Z}} e\left(\sum_{i=1}^{2m/s} \left[\frac{1}{2}\left(n_i + \frac{k}{m}\right)^2\tau + \left(n_i + \frac{k}{m}\right)z_i + \frac{j}{m}n_i\right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2\frac{2m}{s}\tau - \frac{k}{m}\sum_{i=1}^{2m/s} z_i\right) \\
 &= e\left(-\frac{k}{m}\left(\frac{k}{s}\tau - \frac{m-1}{s}j + \sum_{i=1}^{2m/s} z_i\right)\right) \\
 &\quad \sum_{n_1, \dots, n_{2m/s} \in \mathbb{Z}} e\left(\sum_{i=1}^{2m/s} \left[\frac{1}{2}\left(n_i + \frac{k}{m}\right)^2\tau + \left(n_i + \frac{k}{m}\right)z_i + \frac{j}{m}n_i\right] - \frac{m-1}{s}\frac{jk}{m}\right) \\
 &= e\left(-\frac{k}{m}\left(\frac{k}{s}\tau - \frac{m-1}{s}j + \sum_{i=1}^{2m/s} z_i\right)\right) \\
 &\quad \sum_{n_1, \dots, n_{2m/s} \in \mathbb{Z}} e\left(\sum_{i=1}^{2m/s} \left[\frac{1}{2}\left(n_i + \frac{k}{m}\right)^2\tau + \left(n_i + \frac{k}{m}\right)z_i\right]\right) \\
 &\quad e\left(\frac{j}{m}\left(\sum_{i=1}^{2m/s} n_i - \frac{m-1}{s}k\right)\right)
 \end{aligned}$$

となることに注目し,

$$\eta(j, k) = \frac{k}{m}\left(\frac{k}{s}\tau - \frac{m-1}{s}j + \sum_{i=1}^{2m/s} z_i\right)$$

とおき, 次の形の和を取る。

$$\begin{aligned}
& \sum_{j,k=0}^{m-1} \mathbf{e}(\eta(j, k)) \prod_{i=1}^{2m/s} \vartheta\left(z_i + \frac{j+k\tau}{m}\right) \\
&= \sum_{j,k=0}^{m-1} \left[\sum_{n_1, \dots, n_{2m/s} \in \mathbb{Z}} \mathbf{e}\left(\sum_{i=1}^{2m/s} \left[\frac{1}{2}\left(n_i + \frac{k}{m}\right)^2 \tau + \left(n_i + \frac{k}{m}\right)z_i\right]\right) \right. \\
&\quad \left. \mathbf{e}\left(\frac{j}{m}\left(\sum_{i=1}^{2m/s} n_i - \frac{m-1}{s}k\right)\right)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \left[\sum_{n_1, \dots, n_{2m/s} \in \mathbb{Z}} \mathbf{e}\left(\sum_{i=1}^{2m/s} \left[\frac{1}{2}\left(n_i + \frac{k}{m}\right)^2 \tau + \left(n_i + \frac{k}{m}\right)z_i\right]\right) \right. \\
&\quad \left. \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{e}\left(\frac{j}{m}\left(\sum_{i=1}^{2m/s} n_i - \frac{m-1}{s}k\right)\right)\right] \quad \dots \quad (*)
\end{aligned}$$

ここで, $s=2$ の場合は $m-1 \equiv 0 \pmod{2}$ であったから $\frac{m-1}{s} \in \mathbb{Z}$ となるので,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{e}\left(\frac{j}{m}\left(\sum_{i=1}^{2m/s} n_i - \frac{m-1}{s}k\right)\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \left(\sum_{i=1}^{2m/s} n_i - \frac{m-1}{s}k \not\equiv 0 \pmod{m}\right) \\ m & \left(\sum_{i=1}^{2m/s} n_i - \frac{m-1}{s}k \equiv 0 \pmod{m}\right) \end{cases}
\end{aligned}$$

が成り立つ。従って,

$$\begin{aligned}
(*) &= m \sum_{k=0}^{m-1} \left[\sum_{\substack{n_1, \dots, n_{2m/s} \in \mathbb{Z} \\ \sum_{i=1}^{2m/s} n_i - \frac{m-1}{s}k \equiv 0 \pmod{m}}} \mathbf{e}\left(\sum_{i=1}^{2m/s} \left[\frac{1}{2}\left(n_i + \frac{k}{m}\right)^2 \tau + \left(n_i + \frac{k}{m}\right)z_i\right]\right)\right] \\
&= m \sum_{k=0}^{m-1} \left[\sum_{\left(n_i + \frac{k}{m}\right)_{i=1}^{2m/s} \in S_k} \mathbf{e}\left(\sum_{i=1}^{2m/s} \left[\frac{1}{2}\left(n_i + \frac{k}{m}\right)^2 \tau + \left(n_i + \frac{k}{m}\right)z_i\right]\right)\right] \quad \dots \quad (**)
\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{pmatrix} \widetilde{n}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{n_{2m/s}} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} A \left(\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_{2m/s} \end{pmatrix} + \frac{k}{m} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{z}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{z_{2m/s}} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} A \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{2m/s} \end{pmatrix}$$

と書くと, k, n_i に関する和 $\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{(n_i + \frac{k}{m}) \in S_k}$ は, 絶対収束することから, 2.5 節

の結果より, $\begin{pmatrix} \widetilde{n}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{n_{2m/s}} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2m/s}$ についての和に置き換えることができる。

よって,

$$\sum_{i=1}^{2m/s} (n_i + \frac{k}{m})^2 = \sum_{i=1}^{2m/s} \widetilde{n}_i^2, \quad \sum_{i=1}^{2m/s} (n_i + \frac{k}{m}) z_i = \sum_{i=1}^{2m/s} \widetilde{n}_i \widetilde{z}_i$$

が成立するので,

$$\begin{aligned} (**) &= m \sum_{\widetilde{n}_1, \dots, \widetilde{n_{2m/s}} \in \mathbb{Z}} e \left(\sum_{i=1}^{2m/s} \left(\frac{1}{2} \widetilde{n}_i^2 \tau + \widetilde{n}_i \widetilde{z}_i \right) \right) \\ &= m \vartheta(\widetilde{z}_1) \cdots \vartheta(\widetilde{z_{2m/s}}) \end{aligned}$$

と求められる。

3.2 高次のテータ関係式

平行移動の変換公式

$$\vartheta \left(z + \frac{j + k\tau}{m} \right) = e \left(-\frac{k}{m} \left(\frac{k}{2m} \tau + \frac{j}{m} + z \right) \right) \vartheta \left[\begin{matrix} \frac{k}{m} \\ \frac{j}{m} \end{matrix} \right] (z)$$

を適用すると,

$$e(\eta(j, k)) \prod_{i=1}^{2m/s} \vartheta\left(z_i + \frac{j + k\tau}{m}\right) = e\left(-\frac{m+1}{sm}jk\right) \prod_{i=1}^{2m/s} \vartheta\left[\begin{matrix} k \\ m \\ j \\ m \end{matrix}\right](z_i)$$

となり, 前節の結果は次の形にまとめることができる。

定理 3-1 (高次のテータ関係式)

$s = 1$ または 2 とする。整数 $m \in \mathbb{Z}$ は $m \geq 2$ であつて, さらに $s = 2$ のときは奇数であるとする。このとき, 次のテータ関係式が成立する。

$$\sum_{j,k=0}^{m-1} e\left(-\frac{m+1}{sm}jk\right) \prod_{i=1}^{2m/s} \vartheta\left[\begin{matrix} k \\ m \\ j \\ m \end{matrix}\right](z_i) = m \prod_{i=1}^{2m/s} \vartheta\left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right](\tilde{z}_i)$$

ただし, 変数については,

$$\begin{pmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{z_{2m/s}} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} s-m & s & \cdots & s \\ s & s-m & \cdots & s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s & s & \cdots & s-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{2m/s} \end{pmatrix}$$

となっている。

これは, $s = 1$ の場合に [K2] の 定理 1 と同等なものである。また, $s = 2, m = 3$ の場合は, [K1] で示した 3 次のテータ関係式に一致する。

4 拡張された関係式

定理 3-1 の関係式では, 各項に現れる ϑ は同一の指標を持つものに限られている。本節では, 平行移動の公式を適用して, 異なる指標に渡る積を項に持つ関係式を導く。

4.1 係数部の表示

定理 3-1 のテータ関係式に $z_i + \frac{p_i + q_i \tau}{m}$ を代入し, 平行移動の変換式

$$\vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{k}{m} \\ \frac{j}{m} \end{array} \right] \left(z_i + \frac{p_i + q_i \tau}{m} \right) = e \left(-\frac{q_i}{m} \left(\frac{1}{2} \frac{q_i}{m} \tau + \frac{j + p_i}{m} + z_i \right) \right) \vartheta \left[\begin{array}{c} \frac{k + q_i}{m} \\ \frac{j + p_i}{m} \end{array} \right] (z_i)$$

を用いると, 左辺の係数に現れる指数部分は,

$$\begin{aligned} & -\frac{m+1}{sm}kj - \sum_{i=1}^{2m/s} \left(\frac{q_i}{m} \left(\frac{1}{2} \frac{q_i}{m} \tau + \frac{j + p_i}{m} + z_i \right) \right) \\ & = -\sum_{i=1}^{2m/s} \left(\frac{q_i}{m} \left(\frac{1}{2} \frac{q_i}{m} \tau + \frac{p_i}{m} + z_i \right) \right) - \frac{j}{m} \left(\frac{m+1}{s}k + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{2m/s} q_i \right) \end{aligned}$$

となる。

一方,

$$\left(\begin{array}{ccc} \widetilde{p}_1 & \widetilde{q}_1 & \widetilde{z}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{p}_{2m/s} & \widetilde{q}_{2m/s} & \widetilde{z}_{2m/s} \end{array} \right) = \frac{1}{m} A \left(\begin{array}{ccc} p_1 & q_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{2m/s} & q_{2m/s} & z_{2m/s} \end{array} \right)$$

とおくと,

$$\frac{1}{m} A \left(\begin{array}{c} z_1 + \frac{p_1 + q_1 \tau}{m} \\ \vdots \\ z_{2m/s} + \frac{p_{2m/s} + q_{2m/s} \tau}{m} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \widetilde{z}_1 + \frac{\widetilde{p}_1 + \widetilde{q}_1 \tau}{m} \\ \vdots \\ \widetilde{z}_{2m/s} + \frac{\widetilde{p}_{2m/s} + \widetilde{q}_{2m/s} \tau}{m} \end{array} \right)$$

であるから, 右辺の係数部分は以下のようになる。

$$-\sum_{i=1}^{2m/s} \left(\frac{\widetilde{q}_i}{m} \left(\frac{1}{2} \frac{\widetilde{q}_i}{m} \tau + \frac{\widetilde{p}_i}{m} + \widetilde{z}_i \right) \right)$$

4.2 拡張されたテータ関係式

$$\frac{1}{m}A \in O(2m/s) \text{ より,}$$

$$\sum_{i=1}^{2m/s} \left(\frac{q_i}{m} \left(\frac{1}{2} \frac{q_i}{m} \tau + \frac{p_i}{m} + z_i \right) \right) = \sum_{i=1}^{2m/s} \left(\frac{\tilde{q}_i}{m} \left(\frac{1}{2} \frac{\tilde{q}_i}{m} \tau + \frac{\tilde{p}_i}{m} + \tilde{z}_i \right) \right)$$

が成立する。また,

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{p_{2m/s}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{q_{2m/s}} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2m/s}$$

が要請される。ある k に対し,

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{2m/s} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{2m/s} \end{pmatrix} \in S_k$$

となるが, $k \neq 0$ の場合は $S_k \not\subset \mathbb{Z}^{2m/s}$ であるから,

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{2m/s} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{2m/s} \end{pmatrix} \in S_0$$

でなければならない。ゆえに,

$$\sum_{i=1}^{2m/s} p_i \equiv \sum_{i=1}^{2m/s} q_i \equiv 0 \pmod{m}$$

が成立している必要がある。

以上を整理すると, 第1節で提示した高次のテータ関係式を得る。

定理 1-2 (拡張されたテータ関係式)

$s = 1$ または 2 とする。整数 $m \in \mathbb{Z}$ は, $s = 1$ のときは $m \geq 2$ で, $s = 2$ のときは $m > 2$ かつ奇数であるとする。このとき,

$$\sum_{i=1}^{2m/s} p_i \equiv \sum_{i=1}^{2m/s} q_i \equiv 0 \pmod{m}$$

なる $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_1 & \tilde{q}_1 & \tilde{z}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \widetilde{p_{2m/s}} & \widetilde{q_{2m/s}} & \widetilde{z_{2m/s}} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} s-m & \cdots & s \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s & \cdots & s-m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{2m/s} & q_{2m/s} & z_{2m/s} \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k=0}^{m-1} e\left(-\frac{j}{m}\left(\frac{m+1}{s}k + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{2m/s} q_i\right)\right) \prod_{i=1}^{2m/s} \vartheta\left[\frac{\frac{k+q_i}{m}}{\frac{j+p_i}{m}}\right](z_i) \\ &= m \prod_{i=1}^{2m/s} \vartheta\left[\frac{\frac{\tilde{q}_i}{m}}{\frac{\tilde{p}_i}{m}}\right](\tilde{z}_i) \end{aligned}$$

が成立する。

先に注意した通り, これは [K2] の結果 (定理 1-1) の拡張となっており, 任意次数のテータ関係式をあたえている。

参考文献

- [M] Mumford, D., Tata Lectures on Theta I, Progress in Mathematics, Vol. 28, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1983
- [U] 梅村 浩, 「楕円関数論」楕円曲線の解析学, 東京大学出版会, 2000
- [K1] 北川 正一, 「テータ函数の変換公式について」, 九州国際大学教養研究 第18巻 第1号 (2011年7月)
- [K2] 北川 正一, 「偶数次のリーマンのテータ関係式」, 九州国際大学教養研究 第18巻 第2号 (2011年12月)