2 次元実型複素結晶鏡映群の商空間の構成

北 川 正 一

0 使用する記号の確認

使用する記号についてまとめておく。

$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$：自然数全体の集合

$\mathbb{Z}$：有理整数環

$\mathbb{Q}$：有理数体

$\mathbb{R}$：実数体

$\mathbb{C}$：複素数体

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$：0 を除く複素数全体

$\imath = \sqrt{-1}, \quad \omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$

$z \in \mathbb{C}$ に対し，$\Re z$：実部，　$\Im z$：虚部，　$\bar{z} = \Re z - \Im z$：複素共役

$\sigma, \tau \in \mathbb{C}$ に対し，$\mathbb{Z}\sigma = \{m\sigma \mid m \in \mathbb{Z}\}$，$\mathbb{Z}\sigma + \mathbb{Z}\tau = \{m\sigma + n\tau \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$

$\mathrm{e}(\cdot) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\cdot)$

$\mathbf{I}_n$：n 次単位行列

$U(n)$：n 次ユニタリ群

1　結晶鏡映群

本論文では, 2次元の鏡映結晶群について, その商空間を構成する写像をテータ函数を用いて提示する問題を扱う。

まず, ユークリッド空間とその合同変換群について, いくつかの言葉の準備を行う ([CH],[S-T],[T-Y],[P])。

1.1　定義

合同変換のうち, 余次元 1 の空間を点毎に固定する位数 2 の変換を鏡映という。ユニタリ空間においても同様に複素余次元 1 の固定部分空間を持ち, 位数有限な変換を複素鏡映またはユニタリ鏡映と呼ぶ。この場合, 位数は 2 とは限らず 2 以上の任意有限位数の鏡映が存在する。以下では複素鏡映を扱うので, これを単に鏡映ということにする。

合同変換群の離散部分群で, 商空間がコンパクトとなるものを結晶群といい, 鏡映により生成されている結晶群を結晶鏡映群という。

1.2　結晶群

結晶群 G は次の構造を持つことが知られている。

完全列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow G \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

が存在し, L は $\mathbb{R}^n$ の格子, Γ は有限群となる。Γ を G の点群という。

1.3　鏡映

ユニタリ空間 $\mathbb{C}^n$ の合同変換群 $M = U(n) \ltimes \mathbb{C}^n$ について,

$$M = \left\{ \left(\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \boldsymbol{v} \\ \mathbf{0} & 1 \end{array} \right) \middle| \ \mathbf{A} \in U(n),\ \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n \right\}$$

の形に表記する。$\mathbb{C}^n$ への作用は, $z \in \mathbb{C}^n$ に対し,

$$\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \mathbf{A} & v \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}z + v \\ 1 \end{pmatrix}$$

なる形式でとらえることができる。

このとき, $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & v \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \in M$ が鏡映となるための条件は, 以下の 2 つが成立していることである。

(1)　$\mathbf{A}$ は (ユニタリ) 鏡映である。$\mathbf{A}$ の位数を k とするとき,

$$\mathbf{A} \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & \zeta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \zeta_k \end{pmatrix}$$

と対角化され, $\zeta_k \neq 1$ は 1 の原始 k 乗根となっている。

(2)　$\mathbf{A}$ の固定部分空間 (固有値 1 の固有空間) と v は直交している。

$$\{w \in \mathbb{C}^n \mid \mathbf{A}w = w\} \perp v$$

ただし, $v = 0$ の場合を含む。

鏡映の 1 でない固有値に対する固有ベクトルをその鏡映のルートと呼ぶことにする。条件 (2) は v がルートの張る空間に含まれることを示す。

1.4　結晶鏡映群

結晶鏡映群 $G \subset M$ の構造について整理しておく。

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow G \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1 \qquad \cdots \quad (*)$$

より, G は格子 L を正規部分群として含む。L を $\mathbb{C}^n$ 内の格子と見なしたとき,

$$
\begin{aligned}
L &\cong G \cap \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & v \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \middle| v \in \mathbb{C}^n \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & t \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \middle| t \in L \right\}
\end{aligned}
$$

となる。G が鏡映により生成されているためには, 有限群 $\Gamma \subset U(n)$ も有限鏡映群でなければならない。即ち, 鏡映により生成されている必要がある。

この枠組みのなかで, (*) の対応は以下の通りである。

$$
\begin{array}{ccccccc}
L & \longrightarrow & G & & G & \longrightarrow & \Gamma \\
\Psi & & \Psi & & \Psi & & \Psi \\
t & \longmapsto & \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & t \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \mathbf{R} & t \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} & \longmapsto & \mathbf{R}
\end{array}
$$

以降では, 複素結晶鏡映群として次の形の半直積の構造をしているものを扱う。

$$
\begin{aligned}
G &= \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{R} & t \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \middle| \mathbf{R} \in \Gamma,\ t \in L \right\} \\
&\cong \Gamma \ltimes L
\end{aligned}
$$

この場合, 複素結晶鏡映群 G は有限鏡映群 Γ とその不変格子 L により決定される。

1.5 非原始的 (Imprimitive) 有限鏡映群

点群として現れる有限鏡映群について, 定義を確認しておく ([S-T], [CA])。
$\mathbb{C}^n$ の座標の入れ換えを引き起こす変換からなる群を次のように定める。

$$T_i = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ i+1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & & i & i+1 & & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \in GL(n, \mathbb{C})$$

に対し, $\mathfrak{S}_n = \langle T_1, T_2, \dots, T_{n-1} \rangle \subset GL(n, \mathbb{C})$ と書く。$\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群 (と同型) である。この表記のもと, 群 $G(m, p, n)$ を次のように定義する。

$$G(m,p,n) = \left\{ \begin{pmatrix} \theta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \theta_n \end{pmatrix} \middle| \ \theta_j^m = 1, \ \left(\prod_{j=1}^{n} \theta_j \right)^{\frac{m}{p}} = 1 \right\} \rtimes \mathfrak{S}_n$$

次節以降で現れる $G(m, p, 2)$ 型の群は有限複素鏡映群となっており, 点群としてこの形の鏡映群を持つ結晶鏡映群を取り上げる。

2　商空間

結晶群の作用は既約であるものとする。結晶鏡映群によるユニタリ空間の商空間 (軌道空間) は重み付き射影空間となることが知られている。

2.1　重み付き射影空間

$\boldsymbol{m} = (m_0, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ を固定する。$(\mathbb{C}^{n+1})^* = \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{\mathbf{0}\}$ 上の $\mathbb{C}^*$ 作用を次のように定義する。$c \in \mathbb{C}^*$ に対し,

$$c : {}^t(z_0, \dots, z_n) \mapsto {}^t(c^{m_0} z_0, \dots, c^{m_n} z_n)$$

この作用に関する商空間 $(\mathbb{C}^{n+1})^*/\mathbb{C}^*$ を重み $\boldsymbol{m}=(m_0,\dots,m_n)$ を持つ重み付き射影空間 $\mathbb{P}(\boldsymbol{m})$ という。

重みが $(m_0,\dots,m_n)=(1,\dots,1)$ となっている場合が，通常の射影空間 $\mathbb{P}(1,\dots,1)=\mathbb{P}^n$ である。

2.2 商空間を構成する写像

本論文では，複素結晶鏡映群 G に対して，商空間 $\mathbb{C}^n/G\cong\mathbb{P}(m_0,\dots,m_n)$ を考察し，商空間の構成を実現する写像

$$\varphi:\mathbb{C}^n\to\mathbb{P}(m_0,\dots,m_n)$$

を求める問題を考える。φ は G のある種の保型函数 (形式) の組である。

以下 $n=2$ とし，実型の点群を持つ複素結晶鏡映群に対し，テータ函数を用いて上記の「保型函数」を構築していく。

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}^2 & & \\ \downarrow & \searrow^{\varphi} & \\ \mathbb{C}^2/G & \cong & \mathbb{P}(m_0,m_1,m_2)\end{array}$$

3 複素結晶鏡映群のリスト

いくつかの場合に分けて結晶鏡映群のリストを提示する ([T-Y],[K-T-Y],[P])。有限鏡映群と格子をリストアップすることにより，点群が非原始的であるものについて，結晶鏡映群の一覧表をあたえる。

1. 点群が実型のもの
2. $\mathbb{Z}[\imath]=\{a+b\imath\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ 型の格子を持つもの $(\imath=\sqrt{-1})$
3. $\mathbb{Z}[\omega]=\{a+b\omega\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ 型の格子を持つもの $\left(\omega=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$
4. 上記以外の型

3.1　実型

このタイプは点群が実鏡映群 (に共役) となっているものである。格子にはモジュラィの変数 $\tau \in \mathbb{C}$, $\Im\tau > 0$ が現れる。

点 群 Γ	格 子 L
$G(2,1,2)$	$L_1[\tau] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$G(2,1,2)$	$L_2[\tau] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\frac{\tau}{2})\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$G(3,3,2)$	$L_3[\tau] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\begin{pmatrix}\omega\\-\bar{\omega}\end{pmatrix}$
$G(6,6,2)$	$L_3[\tau] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\begin{pmatrix}\omega\\-\bar{\omega}\end{pmatrix}$
$G(6,6,2)$	$L_4[\tau] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}\frac{1}{3}+\mathbb{Z}\tau)\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\omega\\-\bar{\omega}\end{pmatrix}\right)$

3.2　$\mathbb{Z}[\imath]$ 型

点 群 Γ	格 子 L
$G(4,1,2)$	$L_1[\imath] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$G(4,1,2)$	$L_2[\imath] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\frac{1+\imath}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$G(4,2,2)$	$L_1[\imath] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$G(4,2,2)$	$L_2[\imath] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\frac{1+\imath}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

3.3 $\mathbb{Z}[\omega]$ 型

点 群 Γ	格 子 L
$G(3,1,2)$	$L_1[\omega] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$G(3,1,2)$	$L_2[\omega] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\frac{1+2\omega}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$G(6,1,2)$	$L_1[\omega] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$G(6,2,2)$	$L_1[\omega] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$G(6,2,2)$	$L_2[\omega] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\frac{1+2\omega}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$G(6,3,2)$	$L_1[\omega] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

3.4 その他の型

点 群 Γ	格 子 L
$G(6,3,2)$	$L_3[\omega] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}2\omega)\begin{pmatrix}\bar{\omega}\\1\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}2+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

4 テータ函数による写像の構成

$z,\tau \in \mathbb{C}$ ($\Im\tau > 0$), $s, t \in \mathbb{R}$ に対し，次の級数でテータ函数を定義する。

$$\vartheta\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}(\tau|z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{e}\Big(\frac{1}{2}(n+s)^2\tau + (n+s)(z+t)\Big)$$

$\tau \in \mathbb{C}$ は固定されるので，$j,\ k \in \{0, 1\}$ に対し，

$$\vartheta\begin{bmatrix} \frac{j}{2} \\ \frac{k}{2} \end{bmatrix}(\tau|z) = \vartheta_{jk}(z)$$

と書くことにする。

テータ函数 ϑ_{jk} について，

$$\vartheta_{jk}(-z) = \begin{cases} \vartheta_{jk}(z) & ((j,k) \in \{(0,0),(0,1),(1,0)\}) \\ -\vartheta_{jk}(z) & ((j,k) \in \{(1,1)\}) \end{cases}$$

$$\vartheta_{jk}(z+1) = \begin{cases} \vartheta_{jk}(z) & ((j,k) \in \{(0,0),(0,1)\}) \\ -\vartheta_{jk}(z) & ((j,k) \in \{(1,0),(1,1)\}) \end{cases}$$

$$\vartheta_{jk}(z+\tau) = \begin{cases} \mathbf{e}\left(-\frac{\tau}{2} - z\right)\vartheta_{jk}(z) & ((j,k) \in \{(0,0),(1,0)\}) \\ -\mathbf{e}\left(-\frac{\tau}{2} - z\right)\vartheta_{jk}(z) & ((j,k) \in \{(0,1),(1,1)\}) \end{cases}$$

が成立する ([K])。

4.1 $\Gamma = G(2,1,2)$ の場合

$G(2,1,2)$ は位数 8 の群である。複号任意として，

$$\begin{aligned} G(2,1,2) &= \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\} \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

であり，鏡映とそのルートは次の 4 個である。

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) $G(2,1,2) \ltimes L_1[\tau]$

格子は次のようにも表示できる。

$$\begin{aligned} L_1[\tau] &= (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

部分群 G_4 を

$$G_4 = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\} \lhd G(2,1,2)$$

とおく (複号任意) と, $\#G_4 = 4$ である。テータ函数により,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2/(G_4 \ltimes L_1[\tau]) \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ \Psi & & \Psi \\ (x,y) & \longmapsto & ([\vartheta_{00}^2(x) : \vartheta_{10}^2(x)], [\vartheta_{00}^2(y) : \vartheta_{10}^2(y)]) \end{array}$$

なる対応を得る。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2/(G_4 \ltimes L_1[\tau]) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ \big\downarrow{\scriptstyle /\mathfrak{S}_2} & & \big\downarrow{\scriptstyle /\mathfrak{S}_2} \\ \mathbb{C}^2/(G(2,1,2) \ltimes L_1[\tau]) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

に注目し, $G(2,1,2) \ltimes L_1[\tau]$ の生成元について変換則を調べると, 以下の写像を構成することができる。

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2/(G(2,1,2) \ltimes L_1[\tau]) \cong \mathbb{P}^2 \\ & \Psi & & \Psi \\ & (x,y) & \longmapsto & [\,u : v : w\,] \end{array}$$

ここで,

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \vartheta_{00}^2(x)\vartheta_{00}^2(y) \\ v(x,y) &= \vartheta_{10}^2(x)\vartheta_{10}^2(y) \\ w(x,y) &= \vartheta_{00}^2(x)\vartheta_{10}^2(y) + \vartheta_{10}^2(x)\vartheta_{00}^2(y) \end{aligned}$$

である。

(2) $G(2,1,2) \ltimes L_2[\tau]$

$L_2[\tau]$ について,

$$
\begin{aligned}
L_2[\tau] &= (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\frac{\tau}{2})\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= L_1[\tau] + \mathbb{Z}\frac{\tau}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

より,

$$
\begin{aligned}
&G(2,1,2) \ltimes L_2[\tau] \rhd G(2,1,2) \ltimes L_1[\tau] \\
&[\,G(2,1,2) \ltimes L_2[\tau] : G(2,1,2) \ltimes L_1[\tau]\,] = 2
\end{aligned}
$$

であることがわかる。

$(x,y) \mapsto \left(x+\frac{\tau}{2}, y-\frac{\tau}{2}\right)$ なる平行移動により, $L_1[\tau]$ の場合と同じ u, v, w に対し,

$$
\begin{aligned}
u\left(x+\frac{\tau}{2}, y-\frac{\tau}{2}\right) &= \mathrm{e}\left(-\frac{\tau}{2}-x+y\right)v(x,y) \\
v\left(x+\frac{\tau}{2}, y-\frac{\tau}{2}\right) &= \mathrm{e}\left(-\frac{\tau}{2}-x+y\right)u(x,y) \\
w\left(x+\frac{\tau}{2}, y-\frac{\tau}{2}\right) &= \mathrm{e}\left(-\frac{\tau}{2}-x+y\right)w(x,y)
\end{aligned}
$$

となるが, $Aut(\mathbb{P}^2)$ の変換としては,

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
$$

と対角化できるので,

$$
[\,u : v : w\,] \longmapsto [\,u+v : w : u-v\,]
$$

と同次座標の変換を行うと変換 $(x,y) \mapsto \left(x+\frac{\tau}{2}, y-\frac{\tau}{2}\right)$ は,

$$
[\,u+v : w : u-v\,] \longmapsto [\,u+v : w : -u+v\,]
$$

を引き起こす。したがって,

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}(1,1,2) \\ & \Psi & & \Psi \\ & (x,y) & \longmapsto & [\,u+v:w:(u-v)^2\,] \end{array}$$

は,

$$\mathbb{C}^2/(G(2,1,2)\ltimes L_2[\tau])\cong\mathbb{P}(1,1,2)$$

をあたえる。

4.2 $\Gamma=G(3,3,2)$ の場合

$\#G(3,3,2)=6$ で,

$$\begin{aligned} G(3,3,2) &= \left\{ \begin{pmatrix} \omega^r & 0 \\ 0 & \bar{\omega}^r \end{pmatrix} \middle| \, r=0,1,2 \right\} \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

となっている。含まれる鏡映は 3 個で, 対応するルートは次の通り。

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{\omega} \\ -\omega \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega} \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \omega \\ -\bar{\omega} \end{pmatrix}$$

(1) $G(3,3,2)\ltimes L_3[\tau]$

$$L_3[\tau]=(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\begin{pmatrix} -\omega \\ \bar{\omega} \end{pmatrix}$$ なる表示より,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ -1 & \bar{\omega} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

と座標変換を行うと, $(z_1,\ z_2)$ で $L_3[\tau]$ の形で表示されている格子は, $(x,\ y)$ においては, 次のように書き換えられる。

$$\tilde{L_3}[\tau]=(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

点群 $G(3,3,2)$ の表示は,

$$\begin{aligned}\tilde{G}(3,3,2)&=\begin{pmatrix}1&-\omega\\-1&\bar{\omega}\end{pmatrix}^{-1}G(3,3,2)\begin{pmatrix}1&-\omega\\-1&\bar{\omega}\end{pmatrix}\\&=\left\langle\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle\end{aligned}$$

となる。そこで, 商空間 $\mathbb{C}^2/(\tilde{G}(3,3,2)\ltimes\tilde{L_3}[\tau])$ を構成する。

以下では, $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)\cong E(\tau)$ と表記する。$E(\tau)$ は,

$$z\longmapsto[\,\vartheta_{00}^2(z)\vartheta_{11}(z):\vartheta_{00}(z)\vartheta_{01}(z)\vartheta_{10}(z):\vartheta_{11}^3(z)\,]$$

により, $\mathbb{P}^2$ に埋め込まれる。$\vartheta_{jk}(z)\vartheta_{nm}(z)\vartheta_{pq}(z)=(\vartheta_{jk}\vartheta_{nm}\vartheta_{pq})(z)$ のような記法を用い,

$$\xi(z)=(\vartheta_{00}^2\vartheta_{11})(z),\quad\eta(z)=(\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10})(z),\quad\zeta(z)=(\vartheta_{11}^3)(z)$$

とおく。

$$\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2\supset E(\tau)\times E(\tau)\longrightarrow\mathbb{P}^2$$

を $E(\tau)\subset\mathbb{P}^2$ と見なして, $\mathbb{P}^2$ の同次座標を用い,

$$([\,\xi_1:\eta_1:\zeta_1\,],[\,\xi_2:\eta_2:\zeta_2\,])\mapsto[\,\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2:\eta_1\zeta_2-\zeta_1\eta_2:\zeta_1\xi_2-\xi_1\zeta_2\,]$$

により定義できる。そこで, $(x,y)\in\mathbb{C}^2$ から $[\,u:v:w\,]\in\mathbb{P}^2$ への写像として,

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\xi(x)\eta(y)-\eta(x)\xi(y)=\begin{vmatrix}\xi(x)&\xi(y)\\\eta(x)&\eta(y)\end{vmatrix}\\v(x,y)&=\eta(x)\zeta(y)-\zeta(x)\eta(y)=\begin{vmatrix}\eta(x)&\eta(y)\\\zeta(x)&\zeta(y)\end{vmatrix}\\w(x,y)&=\zeta(x)\xi(y)-\xi(x)\zeta(y)=\begin{vmatrix}\zeta(x)&\zeta(y)\\\xi(x)&\xi(y)\end{vmatrix}\end{aligned}$$

を考える。この写像に関し，$\tilde{G}(3,3,2)$ の生成元 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対する不変性は直ちにわかる。もう一つの生成元 $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ については，

$$[\, u(-x-y,y) : v(-x-y,y) : w(-x-y,y) \,] = [\, u(x,y) : v(x,y) : w(x,y) \,]$$

を示す必要があるが，整理すると，

$$\xi(x+y)\begin{vmatrix} \eta(x) & \eta(y) \\ \zeta(x) & \zeta(y) \end{vmatrix} - \eta(x+y)\begin{vmatrix} \zeta(x) & \zeta(y) \\ \xi(x) & \xi(y) \end{vmatrix} + \zeta(x+y)\begin{vmatrix} \xi(x) & \xi(y) \\ \eta(x) & \eta(y) \end{vmatrix} = 0$$

の成立に帰着される。この式はテータ函数の2次の関係式や加法公式を用いて証明することができる。

以上により，次の結論が得られた。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{/\tilde{L_3}[\tau]} & E(\tau)\times E(\tau) \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \\ \downarrow & & \downarrow /\tilde{G}(3,3,2) \\ \mathbb{C}^2/(\tilde{G}(3,3,2) \ltimes \tilde{L_3}[\tau]) & \xrightarrow[\cong]{} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

に注意すると，テータ函数を用いた写像

$$\left.\begin{aligned} u(x,y) &= (\vartheta_{00}^2\vartheta_{11})(x)(\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10})(y) - (\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10})(x)(\vartheta_{00}^2\vartheta_{11})(y) \\ v(x,y) &= (\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10})(x)(\vartheta_{11}^3)(y) - (\vartheta_{11}^3)(x)(\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10})(y) \\ w(x,y) &= (\vartheta_{11}^3)(x)(\vartheta_{00}^2\vartheta_{11})(y) - (\vartheta_{00}^2\vartheta_{11})(x)(\vartheta_{11}^3)(y) \end{aligned}\right\} \cdots (\star)$$

により，

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2/(\tilde{G}(3,3,2) \ltimes \tilde{L_3}[\tau]) \cong \mathbb{P}^2 \\ & \Psi & & \Psi \\ & (x,y) & \longmapsto & [\, u : v : w \,] \end{array}$$

が構成されている。

4.3 $\Gamma = G(6,6,2)$ の場合

$\#G(6,6,2) = 12$ であり，

$$
\begin{aligned}
G(6,6,2) &= \left\{ \pm \begin{pmatrix} \omega^r & 0 \\ 0 & \bar{\omega}^r \end{pmatrix} \middle| \, r = 0,1,2 \right\} \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ -\bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle G(3,3,2), \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \ \triangleright \ G(3,3,2)
\end{aligned}
$$

なる関係がある。特に $[G(6,6,2) : G(3,3,2)] = 2$ である。$G(6,6,2)$ は 6 個の鏡映を含み，ルートは次のように求められる (複号同順)。

$$
\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix} \quad \pm \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} \bar{\omega} \\ \mp \omega \end{pmatrix} \quad \pm \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega} \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} \omega \\ \mp \bar{\omega} \end{pmatrix}
$$

(1) $G(6,6,2) \ltimes L_3[\tau]$

$G(3,3,2)$ の場合と同様の変換を行うと，

$$
\tilde{L_3}[\tau] = (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}(6,6,2) &= \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ -1 & \bar{\omega} \end{pmatrix}^{-1} G(6,6,2) \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ -1 & \bar{\omega} \end{pmatrix} \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \tilde{G}(3,3,2), \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle
\end{aligned}
$$

となり，$\tilde{G}(6,6,2) \ltimes \tilde{L_3}[\tau]$ についての問題に帰着される。さらに，

$$
\tilde{G}(6,6,2) \ltimes \tilde{L_3}[\tau] \ \triangleright \ \tilde{G}(3,3,2) \ltimes \tilde{L_3}[\tau]
$$

であるから，点群が $G(3,3,2)$ であるの場合の結果が利用できる。

$$\tilde{G}(6,6,2) \ltimes \tilde{L_3}[\tau] = \left\langle \tilde{G}(3,3,2) \ltimes \tilde{L_3}[\tau], \begin{pmatrix} -\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

から，$(x,y) \mapsto (-x,-y)$ なる変換について調べればよい。前節 $\Gamma = G(3,3,2)$ の場合の $(\star)$ より，

$$\begin{aligned} u(-x,-y) &= -u(x,y) \\ v(-x,-y) &= -v(x,y) \\ w(-x,-y) &= w(x,y) \end{aligned}$$

が得られ，$Aut(\mathbb{P}^2)$ では，

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

と見なすことができる。以上から，$(\star)$ 式のもと，次の写像により商空間が構成される。

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2/(\tilde{G}(6,6,2) \ltimes \tilde{L_3}[\tau]) \cong \mathbb{P}(1,1,2) \\ & \Psi & & \Psi \\ & (x,y) & \longmapsto & [\, u : v : w^2 \,] \end{array}$$

(2) $G(6,6,2) \ltimes L_4[\tau]$

格子は (1) $L_3[\tau]$ の場合と同じ変換により，次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} L_4[\tau] &= (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega \\ -\bar{\omega} \end{pmatrix} \right) \\ &\qquad + \mathbb{Z}\frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \omega \\ -\bar{\omega} \end{pmatrix} \right) \\ &= (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) \begin{pmatrix} -\omega \\ \bar{\omega} \end{pmatrix} + \mathbb{Z}\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1-\omega \\ -1+\bar{\omega} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これより,

$$\tilde{L}_4[\tau] = (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{Z}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり,

$$\begin{aligned}
&\tilde{G}(6,6,2) \ltimes \tilde{L}_4[\tau] \ \rhd \ \tilde{G}(3,3,2) \ltimes \tilde{L}_3[\tau] \\
&[\,\tilde{G}(6,6,2) \ltimes \tilde{L}_4[\tau] : \tilde{G}(3,3,2) \ltimes \tilde{L}_3[\tau]\,] = 6
\end{aligned}$$

なる関係が成立している。まとめると次のようになっている。

$$\tilde{G}(6,6,2) \ltimes \tilde{L}_4[\tau] = \left\langle \tilde{G}(3,3,2) \ltimes \tilde{L}_3[\tau], \begin{pmatrix} -\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ここで, 新たな種類のテータ函数の記法を導入する。固定した τ のもと,

$$\vartheta_{[j\ k]}(z) = \vartheta\begin{bmatrix} \frac{j}{3} \\ \frac{k}{3} \end{bmatrix}(\tau|z)$$

と書くことにする。指標 j, k は $j, k \in \{0, 1, 2\}$ の範囲で考える。

$$\begin{aligned}
\xi(z) &= \vartheta_{[0\ 0]}(z)\vartheta_{[0\ 1]}(z)\vartheta_{[0\ 2]}(z) \\
\eta(z) &= \vartheta^3_{[0\ 1]}(z) \\
\zeta(z) &= \vartheta^3_{[0\ 2]}(z)
\end{aligned}$$

とおくと, $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau) \cong E(\tau)$ の $\mathbb{P}^2$ への埋め込みを

$$z \longmapsto [\ \xi(z) : \eta(z) : \zeta(z)\ ]$$

で行うことができる。そこで,

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \xi(x)\eta(y) - \eta(x)\xi(y) \\
v(x,y) &= \eta(x)\zeta(y) - \zeta(x)\eta(y) \\
w(x,y) &= \zeta(x)\xi(y) - \xi(x)\zeta(y)
\end{aligned}$$

とおくことにより, 4.2 節と同様に,

$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2/(\tilde{G}(3,3,2) \ltimes \tilde{L_3}[\tau]) \cong \mathbb{P}^2$$

が構成される。

$$\begin{aligned}
\vartheta_{[0\ 0]}(-z) &= \vartheta_{[0\ 0]}(z) \\
\vartheta_{[0\ 1]}(-z) &= \vartheta_{[0\ 2]}(z) \\
\vartheta_{[0\ 2]}(-z) &= \vartheta_{[0\ 1]}(z)
\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}
\xi(-z) &= \xi(z) \\
\eta(-z) &= \zeta(z) \\
\zeta(-z) &= \eta(z)
\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}
u(-x,-y) &= -w(x,y) \\
v(-x,-y) &= -v(x,y) \\
w(-x,-y) &= -u(x,y)
\end{aligned}$$

が成り立つ。まとめると,

$$(x,y) \longmapsto (-x,-y)$$

により,

$$[\,u:v:w\,] \longmapsto [\,-w:-v:-u\,] = [\,w:v:u\,]$$

が引き起こされることがわかる。$Aut(\mathbb{P}^2)$ では,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in PGL(3,\mathbb{C})$$

と表現される。

また,

$$\vartheta_{[0\ 0]}(z+\tfrac{1}{3}) = \vartheta_{[0\ 1]}(z)$$
$$\vartheta_{[0\ 1]}(z+\tfrac{1}{3}) = \vartheta_{[0\ 2]}(z)$$
$$\vartheta_{[0\ 2]}(z+\tfrac{1}{3}) = \vartheta_{[0\ 0]}(z)$$

から,

$$\xi(z+\tfrac{1}{3}) = \xi(z)$$
$$\eta(z+\tfrac{1}{3}) = \zeta(z)$$
$$\zeta(z+\tfrac{1}{3}) = \vartheta_{[0\ 0]}(z)^3 = 3k\xi(z) - \eta(z) - \zeta(z)$$

が得られる。ここで $k \in \mathbb{C}$ はテータ函数の独立性から z に依らない定数となっている。これらの結果から,

$$u(x+\tfrac{1}{3}, y+\tfrac{1}{3}) = -w(x,y)$$
$$v(x+\tfrac{1}{3}, y+\tfrac{1}{3}) = v(x,y) + 3kw(x,y)$$
$$w(x+\tfrac{1}{3}, y+\tfrac{1}{3}) = u(x,y) - w(x,y)$$

となる。整理すると, 平行移動

$$(x,y) \longmapsto \left(x+\frac{1}{3}, y+\frac{1}{3}\right)$$

は, $\mathbb{P}^2$ に

$$[\,u : v : w\,] \longmapsto [\,-w : v+3kw : u-w\,]$$

なる変換として効果を及ぼす。$PGL(3,\mathbb{C})$ での表示は,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3k \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in PGL(3,\mathbb{C})$$

となる。この変換が対角行列で表示されるように座標変換を行う。

$$
\begin{bmatrix} k & 1 & k \\ \omega & 0 & \bar{\omega} \\ \bar{\omega} & 0 & \omega \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3k \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} k & 1 & k \\ \omega & 0 & \bar{\omega} \\ \bar{\omega} & 0 & \omega \end{bmatrix}^{-1}
$$

$$
= \begin{bmatrix} k & 1 & k \\ \omega & 0 & \bar{\omega} \\ \bar{\omega} & 0 & \omega \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3k \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1+\bar{\omega}}{3} & \frac{-1+\omega}{3} \\ 1 & k & k \\ 0 & \frac{-1+\omega}{3} & \frac{-1+\bar{\omega}}{3} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\omega} \end{bmatrix}
$$

と対角化されるので, 同じ変換で,

$$(x, y) \longmapsto (-x, -y)$$

からは,

$$
\begin{bmatrix} k & 1 & k \\ \omega & 0 & \bar{\omega} \\ \bar{\omega} & 0 & \omega \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1+\bar{\omega}}{3} & \frac{-1+\omega}{3} \\ 1 & k & k \\ 0 & \frac{-1+\omega}{3} & \frac{-1+\bar{\omega}}{3} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

なる表示が得られる。したがって, $\mathbb{C}^2/(\tilde{G}(3,3,2) \ltimes \tilde{L_3}[\tau]) \cong \mathbb{P}^2$ 上への

$$(\tilde{G}(6,6,2) \ltimes \tilde{L_4}[\tau])/(\tilde{G}(3,3,2) \ltimes \tilde{L_3}[\tau])$$

の作用は, 座標変換

$$
\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{bmatrix}
= \begin{bmatrix} k & 1 & k \\ \omega & 0 & \bar{\omega} \\ \bar{\omega} & 0 & \omega \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}
$$

のもと,

$$
G_6 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\omega} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle
$$

の形で表現できる。$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ は, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ の置換を引き起こすので, $\tilde{v}+\tilde{w}$, $\tilde{v}\tilde{w}$ の変換の状態を調べる。G_6 の作用で $\tilde{v}\tilde{w}$ は不変で, $\tilde{v}+\tilde{w}$ は,

$$\begin{aligned} &\tilde{v}+\tilde{w} \\ &\omega\tilde{v}+\bar{\omega}\tilde{w} \\ &\bar{\omega}\tilde{v}+\omega\tilde{w} \end{aligned}$$

と変換され, $G_6(\cong \mathfrak{S}_3)$ はこれら 3 つの式の置換群として働いている。そこで, これらの基本対称式を作成すると, 定数となるものを除き,

$$\tilde{v}\tilde{w}, \quad \tilde{v}^3+\tilde{w}^3$$

が得られる。以上から,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2/(\tilde{G}(3,3,2) \ltimes \tilde{L_3}[\tau]) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{P}^2 \\ \big\downarrow{\scriptstyle /G_6} & & \big\downarrow{\scriptstyle /\mathfrak{S}_3} \\ \mathbb{C}^2/(\tilde{G}(6,6,2) \ltimes \tilde{L_4}[\tau]) & \xrightarrow[\cong]{} & \mathbb{P}(1,2,3) \end{array}$$

の枠組みの中で, 次の形で同型の写像を構成することができる。

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2/(\tilde{G}(6,6,2) \ltimes \tilde{L_4}[\tau]) \cong \mathbb{P}(1,2,3) \\ & \Psi & & \Psi \\ & (x,y) & \longmapsto & [\, \tilde{u} : \tilde{v}\tilde{w} : \tilde{v}^3+\tilde{w}^3 \,] \end{array}$$

4.4 点群が実型でない場合について

点群が実型でない, 鏡映の位数が 2 より大きいものを含む場合は, より複雑な群が現れる。点群と格子が半直積となっている場合は比較的扱いやすいが, 点群が非原始的な有限鏡映群 ($G(m,p,n)$ のタイプ) ではない場合は, 位数も大きく, 簡単な一変数テータ函数の組み合わせで商空間を構成することは困難である。

格子の型, 次元により, 本論説で扱った手法とは異なった手法が必要となる。

5 参考文献

[CH] Coxeter, H. S. M., Discrete groups generated by reflections,
Ann. of Math. Vol.35, No.3, July, 1934

[S-T] Shephard, G. C., Todd, J. A., Finite unitary reflection groups,
Canadian J. Math. 6 (1954)

[CA] Cohen, A. M., Finite complex reflection groups,
Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série t. 9, 1976

[T-Y] Tokunaga, S., Yoshida, M., Complex crystallographic groups I,
J. Math. Soc. Japan Volume 34, Number 4 (1982)

[K-T-Y] Kaneko, J., Tokunaga, S., Yoshida, M., Complex crystallographic groups II, J. Math. Soc. Japan Volume 34, Number 4 (1982)

[P] Popov, V. L., Discrete complex reflection groups,
Communications of the Mathematical Institute,
Rijksuniversiteit Utrecht, 15-1982

[K] 北川 正一, 「テータ函数の変換公式について」, 九州国際大学教養研究 第18巻 第1号 (2011年7月)