テータ函数と複素結晶鏡映群の商空間

北 川 正 一

0 記号

[K2] と同様, 以下の記号を用いる。

$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$: 自然数全体の集合

$\mathbb{Z}$: 有理整数環

$\mathbb{Q}$: 有理数体

$\mathbb{R}$: 実数体

$\mathbb{C}$: 複素数体

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash \{0\}$: 0 を除く複素数全体

$\imath = \sqrt{-1}, \quad \omega = \dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$

$z \in \mathbb{C}$ に対し, $\Re z$: 実部, $\Im z$: 虚部, $\bar{z} = \Re z - \Im z$: 複素共役

$\sigma, \tau \in \mathbb{C}$ に対し, $\mathbb{Z}\sigma = \{m\sigma \mid m \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbb{Z}\sigma + \mathbb{Z}\tau = \{m\sigma + n\tau \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$

$\mathrm{e}(\cdot) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\cdot)$

$\mathbf{I}_n$: n 次単位行列

$U(n)$: n 次ユニタリ群

1 結晶鏡映群とその商空間

ユークリッド空間に働く合同変換群の離散部分群で, 商空間がコンパクトとなるものを結晶群といい, 鏡映で生成される結晶群を結晶鏡映群という。本論文では [K2] に引き続き, ユニタリ鏡映結晶群に対し, テータ函数を用いて, その商空間を構成する写像の具体的表示をあたえる問題を扱う。

用語については [CH], [S-T], [T-Y], [P] 等に従う。

1.1 結晶群の構造

結晶群 G は, $\mathbb{C}^n$ の格子 L を正規部分群として含む。また, その商群 G/L である点群 Γ は有限群となる。

完全列

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow G \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1$$

の対応は $\boldsymbol{t} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{A} \in U(n)$ に対し, 次のように表記できる ([K2])。

$$\begin{array}{ccccccc} L & \longrightarrow & G & & G & \longrightarrow & \Gamma \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \boldsymbol{t} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} & \longmapsto & \mathbf{A} \end{array}$$

1.2 鏡映群

ユニタリ変換のうち, 余次元 1 の空間を点毎に固定し, 位数有限なものをユニタリ鏡映または単に鏡映と呼ぶ。鏡映で生成される群を鏡映群という。また, 鏡映の 1 でない固有値に対する固有ベクトルをその鏡映のルートと呼ぶ。$\mathbf{A} \in U(n)$ を鏡映とするとき, そのルート (の一つ) を $\mathbf{r}(\mathbf{A})$ と書くことにする。

鏡映は, 合同変換についても, 同様に定義される。合同変換 $\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$ が鏡映となるための条件は, $\mathbf{A}$ が鏡映であり, $\boldsymbol{t} \in \mathbb{C}\mathbf{r}(\mathbf{A})$ となることである。

1.3 非原始的有限複素鏡映群

結晶群の点群として現れる非原始的有限鏡映群について, 2次元複素型のものは, $G(4,1,2)$, $G(4,2,2)$, $G(3,1,2)$, $G(6,1,2)$, $G(6,2,2)$, $G(6,3,2)$ の6個である。

これらはすべて, 位数 2 の鏡映を含む。さらに, $G(m,1,2)$ の型の群は, 位数 m の鏡映を含み, 2個の鏡映で生成されている。また, $G(m,p,2)$, $p>1$ の型の群は, 位数 m/p の鏡映を含み, 生成元となる鏡映は少なくとも 3 個必要となっている。

1.4 結晶鏡映群の商空間の構成

結晶鏡映群 G によるユニタリ空間 $\mathbb{C}^n$ の商空間は重み付き射影空間

$$\mathbb{P}(m_0,\ldots,m_n)=(\mathbb{C}^{n+1})^*/\Big((z_0,\ldots,z_n)\sim(c^{m_0}z_0,\ldots,c^{m_n}z_n)\Big)$$

$(c\in\mathbb{C}^*)$ となる。

続く節では, 2 次元の場合に商空間を構成する写像

$$\varphi:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2/G\cong\mathbb{P}(m_0,m_1,m_2)$$

を一変数テータ函数の多項式の形で提示する。

2 複素結晶鏡映群

点群 Γ と格子 L が半直積 $\Gamma\ltimes L$ となっているものを取り上げる。点群が(実型でない) 複素型のものについて, 格子の型により分類し, 点群と格子を提示することで2次元の場合の結晶鏡映群のリストを示す。格子の表示については, 基底を点群の鏡映のルートの中から選んでいる。

2.1 $\mathbb{Z}[\imath]$ 型

点群 Γ	格子 L
$G(4,1,2)$	$L_1[\imath] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$G(4,1,2)$	$L_2[\imath] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\frac{1+\imath}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$G(4,2,2)$	$L_1[\imath] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$G(4,2,2)$	$L_2[\imath] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\frac{1+\imath}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

2.2 $\mathbb{Z}[\omega]$ 型

点群 Γ	格子 L
$G(3,1,2)$	$L_1[\omega] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$G(3,1,2)$	$L_2[\omega] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\frac{1+2\omega}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$G(6,1,2)$	$L_1[\omega] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$G(6,2,2)$	$L_1[\omega] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$G(6,2,2)$	$L_2[\omega] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\frac{1+2\omega}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
$G(6,3,2)$	$L_1[\omega] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

2.3 その他の型

点群 Γ	格子 L
$G(6,3,2)$	$L_3[\omega] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}2\omega)\begin{pmatrix} 1+\omega \\ -1 \end{pmatrix} + (\mathbb{Z}2+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3 写像の構成

$z, \tau \in \mathbb{C}\,(\Im\tau > 0)$, $s, t \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\vartheta\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}(\tau|z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{e}\Big(\frac{1}{2}(n+s)^2\tau + (n+s)(z+t)\Big)$$

により, テータ函数を定義する。

3.1 $\mathbb{Z}[\imath]$ 型

$\tau = \imath$ として, テータ函数を以下の形で表記する。

$$\vartheta_{j\,k}(z) = \vartheta\begin{bmatrix} \frac{j}{2} \\ \frac{k}{2} \end{bmatrix}(\imath|z) \qquad \big((j,\,k) \in \{(0,0),\,(0,1),\,(1,0),\,(1,1)\}\big)$$

この場合, テータ函数の変換則は以下の通りである ([K1])。

$$\vartheta_{j\,k}(-z) = \begin{cases} \vartheta_{j\,k}(z) & \big((j,\,k) \in \{(0,0),\,(0,1),\,(1,0)\}\big) \\ -\vartheta_{j\,k}(z) & \big((j,\,k) \in \{(1,1)\}\big) \end{cases}$$

$$\vartheta_{j\,k}(z+1) = \begin{cases} \vartheta_{j\,k}(z) & \big((j,\,k) \in \{(0,0),\,(0,1)\}\big) \\ -\vartheta_{j\,k}(z) & \big((j,\,k) \in \{(1,0),\,(1,1)\}\big) \end{cases}$$

$$\vartheta_{j\,k}(z+\imath) = \begin{cases} \mathbf{e}\left(-\frac{\imath}{2}-z\right)\vartheta_{j\,k}(z) & \big((j,\,k) \in \{(0,0),\,(1,0)\}\big) \\ -\mathbf{e}\left(-\frac{\imath}{2}-z\right)\vartheta_{j\,k}(z) & \big((j,\,k) \in \{(0,1),\,(1,1)\}\big) \end{cases}$$

$$\vartheta_{j\,k}(\imath z) = \begin{cases} \mathbf{e}\left(-\frac{\imath}{2}z^2\right)\vartheta_{j\,k}(z) & ((j,\,k) \in \{(0,0)\}) \\ \mathbf{e}\left(-\frac{\imath}{2}z^2\right)\vartheta_{k\,j}(z) & ((j,\,k) \in \{(0,1),\,(1,0)\}) \\ \imath\mathbf{e}\left(-\frac{\imath}{2}z^2\right)\vartheta_{j\,k}(z) & ((j,\,k) \in \{(1,1)\}) \end{cases}$$

3.1.1 $\Gamma = G(4,2,2)$

点群 $G(4,2,2)$ の構造について確認しておく。複号任意として,

$$\begin{aligned} G(4,2,2) &= \left\{ \begin{pmatrix} \pm\imath & 0 \\ 0 & \pm\imath \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \right\} \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle G(2,1,2), \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

であり, 3 つの鏡映で生成されている。特に

$$G(4,2,2) \rhd G(2,1,2),\ [\ G(4,2,2) : G(2,1,2)\ ] = 2$$

となっており, 位数は $\#G(4,2,2) = 16$ である。鏡映は 6 個あり, そのルートは次の通り。

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ -\imath \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \imath \\ -\imath & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ \imath \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(1) $G(4,2,2) \ltimes L_1[\imath]$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$ より，格子は，

$$L_1[\imath] = (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

と書き換えられる。

点群を比較すると，指数 2 で

$$G(4,2,2) \ltimes L_1[\imath] \rhd G(2,1,2) \ltimes L_1[\imath]$$

となっている。[K2] の結果に $\tau = \imath$ の場合を適用し，

$$\mathbb{C}^2 / (G(2,1,2) \ltimes L_1[\imath]) \cong \mathbb{P}^2$$

の対応を $(x, y) \mapsto [u : v : w]$ で，

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \vartheta_{00}^2(x)\vartheta_{00}^2(y) \\ v(x,y) &= \vartheta_{11}^2(x)\vartheta_{11}^2(y) \\ w(x,y) &= \vartheta_{00}^2(x)\vartheta_{11}^2(y) + \vartheta_{11}^2(x)\vartheta_{00}^2(y) \end{aligned}$$

ととると，

$$\begin{aligned} u(-\imath y, \imath x) &= \mathbf{e}(-\imath(x^2+y^2))u(x,y) \\ v(-\imath y, \imath x) &= \mathbf{e}(-\imath(x^2+y^2))v(x,y) \\ w(-\imath y, \imath x) &= -\mathbf{e}(-\imath(x^2+y^2))w(x,y) \end{aligned}$$

であるから $\mathbb{P}^2$ への作用として，

$$(G(4,2,2) \ltimes L_1[\imath]) / (G(2,1,2) \ltimes L_1[\imath]) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

なる表示が得られる。以上から，商空間は次の写像で構成できる。

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2/(G(4,2,2) \ltimes L_1[\imath]) \cong \mathbb{P}^2(1,1,2) \\ & \Psi & & \Psi \\ & (x, y) & \longmapsto & [u : v : w^2] \end{array}$$

(2) $G(4,2,2) \ltimes L_2[\imath]$

$L_2[\imath]$ は,

$$
\begin{aligned}
L_2[\imath] &= (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \mathbb{Z}\frac{1+\imath}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\\
&= L_1[\imath] + \mathbb{Z}\frac{1+\imath}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と表示される。これより,

$$
\begin{aligned}
&[\,G(4,2,2) \ltimes L_2[\imath] : G(4,2,2) \ltimes L_1[\imath]\,] = 2\\
&G(4,2,2) \ltimes L_2[\imath] \triangleright G(4,2,2) \ltimes L_1[\imath]
\end{aligned}
$$

であることがわかる。

$$
\begin{aligned}
\vartheta_{00}\left(z + \frac{1+\imath}{2}\right) &= -\imath\mathbf{e}\left(-\frac{\imath}{8} - \frac{z}{2}\right)\vartheta_{11}(z)\\
\vartheta_{11}\left(z + \frac{1+\imath}{2}\right) &= -\mathbf{e}\left(-\frac{\imath}{8} - \frac{z}{2}\right)\vartheta_{00}(z)
\end{aligned}
$$

となる ([K1]) ことに注意すると,

$$
\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \frac{1+\imath}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}
$$

により,

$$
\begin{aligned}
u\left(x + \frac{1+\imath}{2}, y - \frac{1+\imath}{2}\right) &= \mathbf{e}\left(-\frac{\imath}{2} - x + y\right)v(x,y)\\
v\left(x + \frac{1+\imath}{2}, y - \frac{1+\imath}{2}\right) &= \mathbf{e}\left(-\frac{\imath}{2} - x + y\right)u(x,y)\\
w\left(x + \frac{1+\imath}{2}, y - \frac{1+\imath}{2}\right) &= \mathbf{e}\left(-\frac{\imath}{2} - x + y\right)w(x,y)
\end{aligned}
$$

と変換される。これは $PGL(2,\mathbb{C})$ での表示では,

$$
\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

となるので,

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2/(G(4,2,2) \ltimes L_2[\imath]) \cong \mathbb{P}^2(1,2,2) \\ & \Psi & & \Psi \\ & (x,\, y) & \longmapsto & [\, u+v : (u-v)^2 : w^2\,] \end{array}$$

が得られる。ここで,

$$\mathbb{P}^2(1,2,2) \cong \mathbb{P}^2$$

であり, $\mathbb{P}^2 \cong \mathbb{P}^2(2,2,2)$ と見なして $\mathbb{P}^2$ への写像として,

$$(x,\, y) \longmapsto [\,(u+v)^2 : (u-v)^2 : w^2\,]$$

により,

$$\mathbb{C}^2/(G(4,2,2) \ltimes L_2[\imath]) \cong \mathbb{P}^2$$

とすることができる。

3.1.2 $\Gamma = G(4,1,2)$

点群について, 対角行列からなる部分群を

$$G_{16} = \left\{ \begin{pmatrix} \imath^r & 0 \\ 0 & \imath^s \end{pmatrix} \middle| \, r, s = 0,1,2,3 \right\}$$

とおくと $\# G_{16} = 16$ であり, 定義より,

$$\begin{aligned} G(4,1,2) &= G_{16} \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \imath & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

となる。また, $\#G(4,1,2)=32$ であり, $G(4,1,2)\triangleright G(4,2,2)$ となっている。10 個の鏡映があり, 対応するルートは,

$$
\begin{pmatrix} \imath^r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (r=1,2,3) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \imath^r \end{pmatrix} (r=1,2,3) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -\imath \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \imath \\ -\imath & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \imath \end{pmatrix}
$$

と求められる。

(1) $G(4,1,2)\ltimes L_1[\imath]$

$\Gamma=G(4,2,2)$ の場合に確認したように格子の表示は,

$$
L_1[\imath]=(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

としてよい。

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}/(\langle\imath\rangle\ltimes(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\imath))\cong\mathbb{P} \\
\Psi & & \Psi \\
z & \longmapsto & [\,\vartheta_{00}^4(z):\vartheta_{11}^4(z)\,]
\end{array}
$$

なる対応から,

$$
G(4,1,2)\ltimes L_1[\imath]\triangleright G_{16}\ltimes L_1[\imath]
$$
$$
(G(4,1,2)\ltimes L_1[\imath])\,/\,(G_{16}\ltimes L_1[\imath])\cong\mathfrak{S}_2
$$

より,

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}^2 & \xrightarrow{/(G_{16}\ltimes L_1[\imath])} & \mathbb{C}^2/\,(G_{16}\ltimes L_1[\imath])\cong\mathbb{P}\times\mathbb{P} \\
\big\downarrow{\scriptstyle /G(4,1,2)\ltimes L_1[\imath]} & & \big\downarrow{\scriptstyle /\mathfrak{S}_2} \\
\mathbb{P}^2 & \underset{\cong}{\longleftarrow} & (\mathbb{P}\times\mathbb{P})/\mathfrak{S}_2
\end{array}
$$

となる。さらに,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}\times\mathbb{P} & \longrightarrow & (\mathbb{P}\times\mathbb{P})/\mathfrak{S}_2 \cong \mathbb{P}^2 \\ \Psi & & \Psi \\ ([\,\xi_1:\eta_1\,],[\,\xi_2:\eta_2\,]) & \longmapsto & [\,\xi_1\xi_2:\eta_1\eta_2:\xi_1\eta_2+\eta_1\xi_2\,] \end{array}$$

であるから, 次の写像が構成できる。

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2/(G(4,1,2)\ltimes L_1[\imath]) \cong \mathbb{P}^2 \\ & \Psi & & \Psi \\ & (x,\, y) & \longmapsto & [\,u:v:w\,] \end{array}$$

ただし, u, v, w は以下の通り。

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \vartheta_{00}^4(x)\vartheta_{00}^4(y) \\ v(x,y) &= \vartheta_{11}^4(x)\vartheta_{11}^4(y) \\ w(x,y) &= \vartheta_{00}^4(x)\vartheta_{11}^4(y)+\vartheta_{11}^4(x)\vartheta_{00}^4(y) \end{aligned}$$

(2) $G(4,1,2)\ltimes L_2[\imath]$

$L_2[\imath]$ は以下のように表示される。

$$L_2[\imath] = L_1[\imath] + \mathbb{Z}\frac{1+\imath}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

このとき, $\Gamma = G(4,2,2)$ の場合と同様,

$$\begin{aligned} &[\,G(4,1,2)\ltimes L_2[\imath] : G(4,1,2)\ltimes L_1[\imath]\,] = 2 \\ &G(4,1,2)\ltimes L_2[\imath] \rhd G(4,1,2)\ltimes L_1[\imath] \end{aligned}$$

である。

次のように $G(4,1,2)\ltimes L_1[\imath]$ による商空間を構成し直す。

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\varphi}: & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2/(G(4,1,2)\ltimes L_1[\imath]) \cong \mathbb{P}^2 \\ & \Psi & & \Psi \\ & (x,y) & \longmapsto & [\,\tilde{u}:\tilde{v}:\tilde{w}\,] \end{array}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x,y) &= \vartheta_{00}^4(x)\vartheta_{11}^4(y)+\vartheta_{11}^4(x)\vartheta_{00}^4(y)\\
\tilde{v}(x,y) &= \vartheta_{00}^4(x)\vartheta_{00}^4(y)+\vartheta_{11}^4(x)\vartheta_{11}^4(y)\\
\tilde{w}(x,y) &= \vartheta_{00}^4(x)\vartheta_{00}^4(y)-\vartheta_{11}^4(x)\vartheta_{11}^4(y)
\end{aligned}$$

このとき, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dfrac{1+\imath}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ により,

$$\begin{aligned}
\tilde{u}\left(x+\frac{1+\imath}{2}, y-\frac{1+\imath}{2}\right) &= \mathrm{e}\left(-\imath-2x+2y\right)\tilde{u}(x,y)\\
\tilde{v}\left(x+\frac{1+\imath}{2}, y-\frac{1+\imath}{2}\right) &= \mathrm{e}\left(-\imath-2x+2y\right)\tilde{v}(x,y)\\
\tilde{w}\left(x+\frac{1+\imath}{2}, y-\frac{1+\imath}{2}\right) &= -\mathrm{e}\left(-\imath-2x+2y\right)\tilde{w}(x,y)
\end{aligned}$$

となる。この変換は $\mathbb{P}^2$ への作用として,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

と書けるので, 次の表示により $G(4,1,2)\ltimes L_2[\imath]$ の商空間を構成する写像が得られる。

$$\begin{array}{cccc}
\varphi: & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2/(G(4,1,2)\ltimes L_2[\imath]) \cong \mathbb{P}^2(1,1,2) \\
& \Psi & & \Psi \\
& (x,\, y) & \longmapsto & [\,\tilde{u}:\tilde{v}:\tilde{w}^2\,]
\end{array}$$

3.2 $\mathbb{Z}[\omega]$ 型

以下の節では,

$$\vartheta_{[j\ k]}(z) = \vartheta\left[\begin{array}{c} \frac{j}{6} \\ \frac{k}{6} \end{array}\right](\omega|z)$$

と表記する。

テータ函数の変換則は以下のようになる [K1]。

$$\vartheta_{[j\ k]}(-z) = \mathbf{e}\left(\frac{j}{6}\right)\vartheta_{[6-j\ 6-k]}(z)$$

$$\vartheta_{[j\ k]}\left(z+\frac{a}{6}\right) = \vartheta_{[j\ k+a]}(z)$$

$$\vartheta_{[j\ k]}\left(z+\frac{b\omega}{6}\right) = \mathbf{e}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{b}{6}\right)^2\omega - \frac{b}{6}\left(z+\frac{k}{6}\right)\right)\vartheta_{[j+b\ k]}(z)$$

$$\vartheta_{[j\ k]}(\omega z) = -\imath\omega\mathbf{e}\left(-\frac{\omega}{2}z^2 + \frac{j}{6}\frac{k}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{k-3}{6}\right)^2\right)\vartheta_{[6-k\ 3+j-k]}(z)$$

3.2.1 $\Gamma = G(3,1,2)$

点群の対角行列からなる部分群は,

$$G_9 = \left\{\left.\begin{pmatrix}\omega^r & 0\\ 0 & \omega^s\end{pmatrix}\right| r,s=0,1,2\right\}$$

であり, $\#G_9 = 9$ となっている。

$$\begin{aligned} G(3,1,2) &= G_9 \rtimes \left\langle\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\rangle \\ &= \left\langle\begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\rangle \end{aligned}$$

$\#G(3,1,2) = 18$ である。鏡映とルートは次の通り。

$$\begin{array}{llll}
\begin{pmatrix}\omega^r & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(r=1,2) & \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \omega^r\end{pmatrix}(r=1,2) & \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0 & \bar{\omega}\\ \omega & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\ -\omega\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}0 & \omega\\ \bar{\omega} & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\\ -\bar{\omega}\end{pmatrix} & &
\end{array}$$

(1) $G(3,1,2) \ltimes L_1[\omega]$

格子は,

$$L_1[\omega] = (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書き換えられる。

$$G(3,1,2) \ltimes L_1[\omega] \rhd G_9 \ltimes L_1[\omega]$$
$$(G(3,1,2) \ltimes L_1[\omega]) \,/\, (G_9 \ltimes L_1[\omega]) \cong \mathfrak{S}_2$$

より,

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}^2 & \xrightarrow{/(G_9 \ltimes L_1[\omega])} & \mathbb{C}^2/\,(G_9 \ltimes L_1[\omega]) \cong \mathbb{P} \times \mathbb{P} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle /G(3,1,2)\ltimes L_1[\omega]} & & \Big\downarrow{\scriptstyle /\mathfrak{S}_2} \\
\mathbb{P}^2 & \underset{\cong}{\longleftarrow} & (\mathbb{P} \times \mathbb{P})/\mathfrak{S}_2
\end{array}$$

となっている。一方, $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2/\,(G_9 \ltimes L_1[\omega])$ は,

$$(x,\, y) \mapsto ([\vartheta_{[0\ 0]}\vartheta_{[0\ 3]}\vartheta_{[3\ 0]}(x) : \vartheta^3_{[3\ 3]}(x)], [\vartheta_{[0\ 0]}\vartheta_{[0\ 3]}\vartheta_{[3\ 0]}(y) : \vartheta^3_{[3\ 3]}(y)])$$

により得られる。以上から,

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \vartheta_{[0\ 0]}\vartheta_{[0\ 3]}\vartheta_{[3\ 0]}(x)\,\vartheta_{[0\ 0]}\vartheta_{[0\ 3]}\vartheta_{[3\ 0]}(y) \\
v(x,y) &= \vartheta^3_{[3\ 3]}(x)\vartheta^3_{[3\ 3]}(y) \\
w(x,y) &= \vartheta_{[0\ 0]}\vartheta_{[0\ 3]}\vartheta_{[3\ 0]}(x)\,\vartheta^3_{[3\ 3]}(y) + \vartheta^3_{[3\ 3]}(x)\,\vartheta_{[0\ 0]}\vartheta_{[0\ 3]}\vartheta_{[3\ 0]}(y)
\end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{array}{cccc}
\varphi : & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2/(G(3,1,2) \ltimes L_1[\omega]) \cong \mathbb{P}^2 \\
& \Psi & & \Psi \\
& (x,y) & \longmapsto & [u : v : w]
\end{array}$$

が構成できる。

(2) $G(3,1,2) \ltimes L_2[\omega]$

格子 $L_2[\omega]$ については,

$$\begin{aligned} L_2[\omega] &= (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \mathbb{Z}\frac{2+\omega}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \\ &= L_1[\omega] + \mathbb{Z}\frac{2+\omega}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書き直すことができる。これより,

$$[G(3,1,2) \ltimes L_2[\omega] : G(3,1,2) \ltimes L_1[\omega]] = [G_9 \ltimes L_2[\omega] : G_9 \ltimes L_1[\omega]] = 3$$

が得られるが, $G(3,1,2) \ltimes L_1[\omega]$ は $G(3,1,2) \ltimes L_2[\omega]$ の中で正規ではない。

G_9 については,

$$G_9 \ltimes L_2[\omega] \rhd G_9 \ltimes L_1[\omega]$$

であり, さらに,

$$G(3,1,2) \ltimes L_2[\omega] \rhd G_9 \ltimes L_1[\omega]$$
$$[G(3,1,2) \ltimes L_2[\omega] : G_9 \ltimes L_1[\omega]] = 6$$

であるので, この関係を利用する。$\mathbb{C}^2/(G_9 \ltimes L_1[\omega]) \cong \mathbb{P}\times\mathbb{P}$ 上への

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \frac{2+\omega}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

による変換を調べる。

$\mathbb{C} \to \mathbb{C}/(\langle\omega\rangle \ltimes (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega))$ を

$$z \longmapsto [\vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}(z) : \vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}(z)]$$

で定めると,

$$\begin{aligned} &\left[\vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}\left(x+\frac{2+\omega}{3}\right) : \vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}\left(x+\frac{2+\omega}{3}\right)\right] \\ = &\left[\omega\vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}(x) : \vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}(x)\right] \\ &\left[\vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}\left(y-\frac{2+\omega}{3}\right) : \vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}\left(y-\frac{2+\omega}{3}\right)\right] \\ = &\left[\bar{\omega}\vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}(y) : \vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}(y)\right] \end{aligned}$$

となる。これより,

$$
\begin{aligned}
u(x,y) \;=\; & \quad\;\; \vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}(x)/\vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}(x) \\
& + \;\; \vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}(y)/\vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}(y) \\
v(x,y) \;=\; & \quad \omega \;\; \vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}(x)/\vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}(x) \\
& +\bar{\omega} \;\; \vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}(y)/\vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}(y) \\
w(x,y) \;=\; & \quad \bar{\omega} \;\; \vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}(x)/\vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}(x) \\
& +\omega \;\; \vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}(y)/\vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}(y)
\end{aligned}
$$

とおくと,

$$
(G(3,1,2) \ltimes L_2[\omega]) \,/\, (G_9 \ltimes L_1[\omega])
$$

の作用は, u, v, w の間の置換を引き起こす。

$$
\begin{aligned}
u+v+w \quad & = 0 \\
uv+vw+wu & = -3\vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}(x)/\vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}(x) \\
& \qquad \vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}(y)/\vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}(y) \\
uvw \quad & = \left(\vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}(x)/\vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}(x)\right)^3 \\
& \quad + \left(\vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}(y)/\vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}(y)\right)^3
\end{aligned}
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}(x,y) \; & = \vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}(x)\,\vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}(y) \\
\tilde{v}(x,y) \; & = \vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}(x)\,\vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}(y) \\
\tilde{w}(x,y) & = (\vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]})^3(x)(\vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]})^3(y) \\
& \quad +(\vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]})^3(x)(\vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]})^3(y)
\end{aligned}
$$

により, 次の写像が得られた。

$$
\begin{array}{cccc}
\varphi: & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2/(G(3,1,2) \ltimes L_2[\omega]) \cong \mathbb{P}^2(1,1,3) \\
 & \Psi & & \Psi \\
 & (x,\,y) & \longmapsto & [\,\tilde{u} : \tilde{v} : \tilde{w}\,]
\end{array}
$$

3.2.2　$\Gamma = G(6,1,2)$

対角行列からなる部分群を

$$G_{36} = \left\{ \begin{pmatrix} (1+\omega)^r & 0 \\ 0 & (1+\omega)^s \end{pmatrix} \middle| r, s = 0, 1, \ldots, 5 \right\}$$

とおくと $\#G_{36} = 36$ であり,

$$\begin{aligned} G(6,1,2) &= G_{36} \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1+\omega & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

より $\#G(6,1,2) = 72$ となる。また, $G(6,1,2) \rhd G(6,2,2)$ である。$G(6,1,2)$ は 16 個の鏡映を含み, ルートは複号同順で次のように求められる。

$$\begin{pmatrix} (1+\omega)^r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (r = 1, 2. \ldots, 5) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1+\omega)^r \end{pmatrix} (r = 1, 2, \ldots, 5) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix} \quad \pm \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp \bar{\omega} \end{pmatrix} \quad \pm \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega} \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp \omega \end{pmatrix}$$

(1) $G(6,1,2) \ltimes L_1[\omega]$

格子の表示については,

$$L_1[\omega] = (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であった。$\Gamma = G(3,1,2)$ の場合と同様に,

$$G(6,1,2) \ltimes L_1[\omega] \rhd G_{36} \ltimes L_1[\omega]$$
$$(G(6,1,2) \ltimes L_1[\omega]) \,/\, (G_{36} \ltimes L_1[\omega]) \cong \mathfrak{S}_2$$

となっている。

$\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\left(\langle 1+\omega\rangle \ltimes (\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega)\right)$ は

$$z \mapsto \left[\left(\vartheta_{[0\ 0]}\vartheta_{[0\ 3]}\vartheta_{[3\ 0]}(z)\right)^2 : \left(\vartheta_{[3\ 3]}^3(z)\right)^2\right]$$

により埋め込まれるので,

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= \vartheta_{[0\ 0]}^2\vartheta_{[0\ 3]}^2\vartheta_{[3\ 0]}^2(x)\,\vartheta_{[0\ 0]}^2\vartheta_{[0\ 3]}^2\vartheta_{[3\ 0]}^2(y)\\
v(x,y) &= \vartheta_{[3\ 3]}^6(x)\vartheta_{[3\ 3]}^6(y)\\
w(x,y) &= \vartheta_{[0\ 0]}^2\vartheta_{[0\ 3]}^2\vartheta_{[3\ 0]}^2(x)\,\vartheta_{[3\ 3]}^6(y) + \vartheta_{[3\ 3]}^6(x)\,\vartheta_{[0\ 0]}^2\vartheta_{[0\ 3]}^2\vartheta_{[3\ 0]}^2(y)
\end{aligned}$$

とおくと，次の写像が得られる。

$$\begin{array}{rccc}
\varphi: & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2/(G(6,1,2)\ltimes L_1[\omega]) \cong \mathbb{P}^2\\
& \Psi & & \Psi\\
& (x,\,y) & \longmapsto & [\,u:v:w\,]
\end{array}$$

3.2.3　$\Gamma = G(6,2,2)$

対角行列の部分群は,

$$G_{18} = \left\{ \begin{pmatrix} (1+\omega)^r & 0 \\ 0 & (1+\omega)^s \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} r,s = 0,1,\ldots,5, \\ r \equiv s \pmod 2 \end{array} \right\}$$

であり，$\#G_{18} = 18$ となる。

$$\begin{aligned}
G(6,2,2) &= G_{18} \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle\\
&= \left\langle \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1+\omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle\\
&= \left\langle G(3,1,2), \begin{pmatrix} 0 & 1+\omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \right\rangle\\
&= \left\langle G(3,1,2), \begin{pmatrix} 1+\omega & 0 \\ 0 & 1+\omega \end{pmatrix} \right\rangle
\end{aligned}$$

より $\#G(6,2,2)=36$ である。特に $G(6,2,2) \triangleright G(3,1,2)$ となっている。鏡映およびルートは，複号同順で，

$$\begin{pmatrix} \omega^r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (r=1,2) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega^r \end{pmatrix} (r=1,2) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\pm\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix} \quad \pm\begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \bar{\omega} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp\bar{\omega} \end{pmatrix} \quad \pm\begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega} \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp\omega \end{pmatrix}$$

となっている。ルートは $G(6,1,2)$ の場合と一致しているが，鏡映の中に位数が異なるものがある。

(1) $G(6,2,2) \ltimes L_1[\omega]$

点群を比較すると，

$$G(6,2,2) \ltimes L_1[\omega] \triangleright G(3,1,2) \ltimes L_1[\omega]$$

であり，

$$G(6,2,2) \ltimes L_1[\omega] = \left\langle G(3,1,2) \ltimes L_1[\omega], \begin{pmatrix} (1+\omega)\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

となっている。$\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2/(G(3,1,2) \ltimes L_1[\omega]) \cong \mathbb{P}^2$ を実現する写像

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \vartheta_{[0\ 0]}\vartheta_{[0\ 3]}\vartheta_{[3\ 0]}(x)\,\vartheta_{[0\ 0]}\vartheta_{[0\ 3]}\vartheta_{[3\ 0]}(y) \\ v(x,y) &= \vartheta^3_{[3\ 3]}(x)\vartheta^3_{[3\ 3]}(y) \\ w(x,y) &= \vartheta_{[0\ 0]}\vartheta_{[0\ 3]}\vartheta_{[3\ 0]}(x)\,\vartheta^3_{[3\ 3]}(y) + \vartheta^3_{[3\ 3]}(x)\,\vartheta_{[0\ 0]}\vartheta_{[0\ 3]}\vartheta_{[3\ 0]}(y) \end{aligned}$$

に対して，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1+\omega)x \\ (1+\omega)y \end{pmatrix}$$

による変換がどのような結果をもたらすかを調べると，

$$\begin{aligned} u((1+\omega)x,\,(1+\omega)y) &= \mathbf{e}\left(\frac{3}{2}\bar{\omega}(x^2+y^2)\right) u(x,y) \\ v((1+\omega)x,\,(1+\omega)y) &= \mathbf{e}\left(\frac{3}{2}\bar{\omega}(x^2+y^2)\right) v(x,y) \\ w((1+\omega)x,\,(1+\omega)y) &= -\mathbf{e}\left(\frac{3}{2}\bar{\omega}(x^2+y^2)\right) w(x,y) \end{aligned}$$

と求めることができる。これは, $\mathbb{P}^2$ に,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

として作用する。よって, 上記の記号のもと, 次の対応が得られた。

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2/(G(6,2,2) \ltimes L_1[\omega]) \cong \mathbb{P}^2(1,1,2) \\ & \Psi & & \Psi \\ & (x, y) & \longmapsto & [\, u : v : w^2 \,] \end{array}$$

(2) $G(6,2,2) \ltimes L_2[\omega]$

$L_1[\omega]$ の場合と同様に,

$$G(6,2,2) \ltimes L_2[\omega] \rhd G(3,1,2) \ltimes L_2[\omega]$$

$$G(6,2,2) \ltimes L_2[\omega] = \left\langle G(3,1,2) \ltimes L_2[\omega], \begin{pmatrix} (1+\omega)\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

である。

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}(x)\,\vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}(y) \\ v(x,y) &= \vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}(x)\,\vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}(y) \\ w(x,y) &= (\vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]})^3(x)(\vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]})^3(y) \\ &\quad +(\vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]})^3(x)(\vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]})^3(y) \end{aligned}$$

により,

$$\varphi(x,y) = [\, u : v : w \,]$$

とすることで,

$$\mathbb{C}^2/(G(3,1,2) \ltimes L_2[\omega]) \cong \mathbb{P}^2(1,1,3)$$

が実現されていた。今,

$$
\begin{aligned}
\vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}((1+\omega)x) &= -\mathbf{e}\left(\frac{3}{2}\frac{x^2}{\omega}\right)\vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}(x)\\
\vartheta_{[1\ 3]}\vartheta_{[3\ 1]}\vartheta_{[5\ 5]}((1+\omega)x) &= -\mathbf{e}\left(\frac{3}{2}\frac{x^2}{\omega}\right)\vartheta_{[1\ 1]}\vartheta_{[3\ 5]}\vartheta_{[5\ 3]}(x)
\end{aligned}
$$

であるから,

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1+\omega)x \\ (1+\omega)y \end{pmatrix}
$$

は

$$
\mathbb{C}^2/(G(3,1,2)\ltimes L_2[\omega]) \cong \mathbb{P}^2(1,1,3)
$$

に

$$
[u:v:w] \mapsto [v:u:w]
$$

なる変換を引き起こす。したがって,

$$
\psi(x,y) = [u+v:(u-v)^2:w]
$$

により,

$$
\psi:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2/(G(6,2,2)\ltimes L_2[\omega]) \cong \mathbb{P}^2(1,2,3)
$$

が得られる。

3.2.4　$\Gamma = G(6,3,2)$

対角部分群は,

$$
G_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} (1+\omega)^r & 0 \\ 0 & (1+\omega)^s \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} r,s=0,1,\ldots,5, \\ r+s\equiv 0 \pmod 3 \end{array} \right\}
$$

となっていて, $\#G_{12}=12$ である。

$$G(6,3,2)=G_{12}\rtimes\left\langle\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$=\left\langle\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1+\omega\\-\omega&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\rangle$$

より, $G(6,3,2)$ は 3 つの鏡映で生成される。$\#G(6,3,2)=24$ であり,

$$G(6,3,2)\rhd G(6,6,2)$$

および,

$$G_4=\left\{\begin{pmatrix}\pm1&0\\0&\pm1\end{pmatrix}\right\}\ (\text{複号任意})$$

とおくと, $G(6,3,2)\rhd G_4$ が成り立っている。ルートは $G(6,1,2)$, $G(6,2,2)$ のものと一致しているが, 鏡映の位数はすべて 2 である。

$$\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$\pm\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1\\\mp1\end{pmatrix}\quad\pm\begin{pmatrix}0&\omega\\\bar\omega&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1\\\mp\bar\omega\end{pmatrix}\quad\pm\begin{pmatrix}0&\bar\omega\\\omega&0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}1\\\mp\omega\end{pmatrix}$$

(複号同順)

(1) $G(6,3,2)\ltimes L_1[\omega]$
指数 6 で,

$$G(6,3,2)\ltimes L_1[\omega]\rhd G_4\ltimes L_1[\omega]$$

となっている。

$$\xi(x)=\vartheta_{[1\ 5]}\vartheta_{[5\ 1]}(x),\quad \eta(x)=\vartheta^2_{[3\ 3]}(x)$$

とおく。$\xi(-x)=\xi(x)$, $\eta(-x)=\eta(x)$ となることに注意する。

$$\mathbb{C}^2/(G_4\ltimes L_1[\omega])\cong\mathbb{P}\times\mathbb{P}$$

は,

$$(x,y)\mapsto([\xi(x):\eta(x)],[\xi(y):\eta(y)])$$

により構成することができる。

$$(G(6,3,2)\ltimes L_1[\omega])/(G_4\ltimes L_1[\omega])\cong\left\langle\begin{pmatrix}\bar\omega&0&0\\0&\omega&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\rangle$$

であるから,

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\bar\omega x\\\omega y\end{pmatrix}$$

について調べると,

$$\begin{aligned}\xi(\bar\omega x)&=\mathbf{e}(\bar\omega x^2)\xi(x)\\\eta(\bar\omega x)&=\omega\mathbf{e}(\bar\omega x^2)\eta(x)\\\xi(\omega y)&=\mathbf{e}(-\omega y^2)\xi(y)\\\eta(\omega y)&=\bar\omega\mathbf{e}(-\omega y^2)\eta(y)\end{aligned}$$

と求められる。そこで,

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\xi(x)\xi(y)\\v(x,y)&=\eta(x)\eta(y)\\w(x,y)&=\xi(x)^3\eta(y)^3+\eta(x)^3\xi(y)^3\end{aligned}$$

とすると,

$$\begin{array}{cccc}\varphi: & \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2/(G(6,3,2)\ltimes L_1[\omega])\cong\mathbb{P}^2(1,1,3)\\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$}\\ & (x,y) & \longmapsto & [u:v:w]\end{array}$$

が得られる。

4 参考文献

[C] Coxeter, H. S. M., Discrete groups generated by reflections,
Ann. of Math. Vol.35, No.3, July, 1934

[S-T] Shephard, G. C., Todd, J. A., Finite unitary reflection groups,
Canadian J. Math. 6 (1954)

[CA] Cohen, A. M., Finite complex reflection groups,
Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série t. 9, 1976

[T-Y] Tokunaga, S., Yoshida, M., Complex crystallographic groups I,
J. Math. Soc. Japan Volume 34, Number 4 (1982)

[K-T-Y] Kaneko, J., Tokunaga, S., Yoshida, M., Complex crystallographic groups II, J. Math. Soc. Japan Volume 34, Number 4 (1982)

[P] Popov, V. L., Discrete complex reflection groups,
Communications of the Mathematical Institute,
Rijksuniversiteit Utrecht, 15-1982

[K1] 北川 正一, 「テータ函数の変換公式について」, 九州国際大学教養研究 第18巻 第1号 (2011年7月)

[K2] 北川 正一, 「2次元実型複素結晶鏡映群の商空間の構成」, 九州国際大学教養研究 第19巻 第2号 (2012年12月)